



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
Τμήμα Πολιτικών Έργων Υποδομής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΙΙ

Δοκοί, Πλαίσια, Δικτυώματα,
Γραμμές Επιρροής και Υπερστατικοί Φορείς

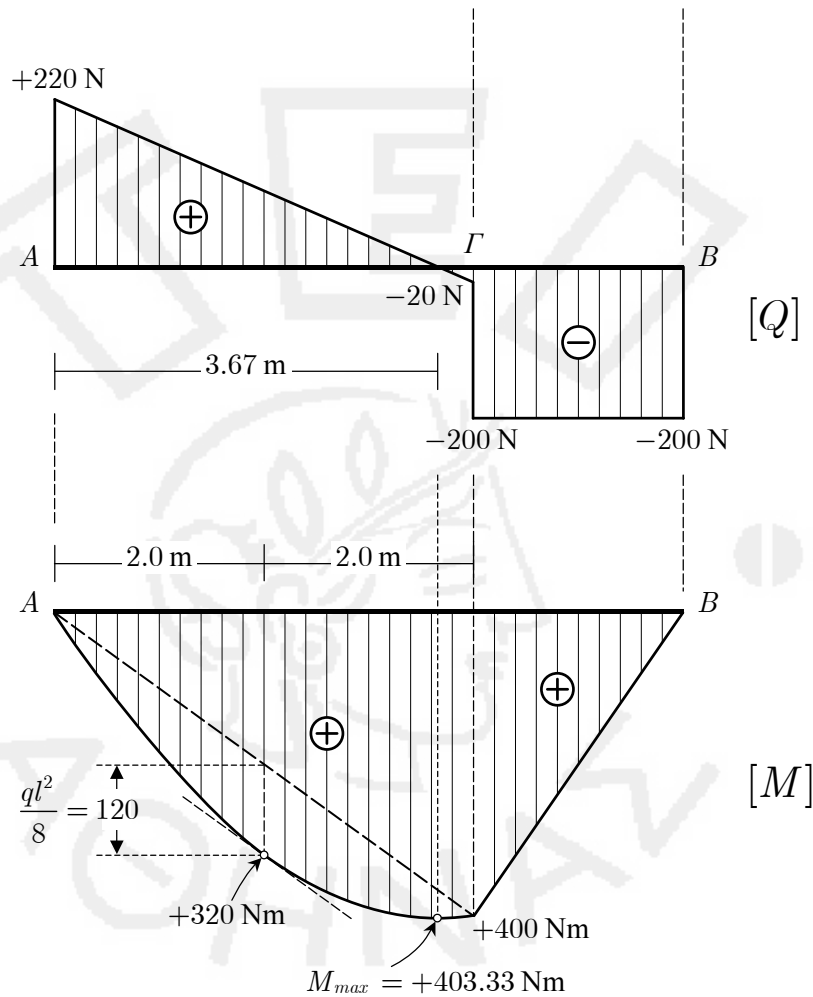
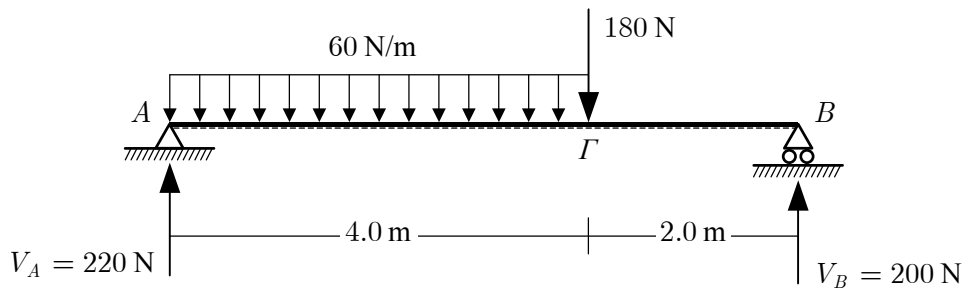
Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

Μάρτιος 2011

Μέρος 1^ο

Διαγράμματα M , Q , N σε δοκούς

Άσκηση 1



Αντιδράσεις: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 6V_B - 2 \times (60 \times 4) - 4 \times 180 = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 200 \text{ N}}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 4 \times 60 - 180 = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 220 \text{ N}}$

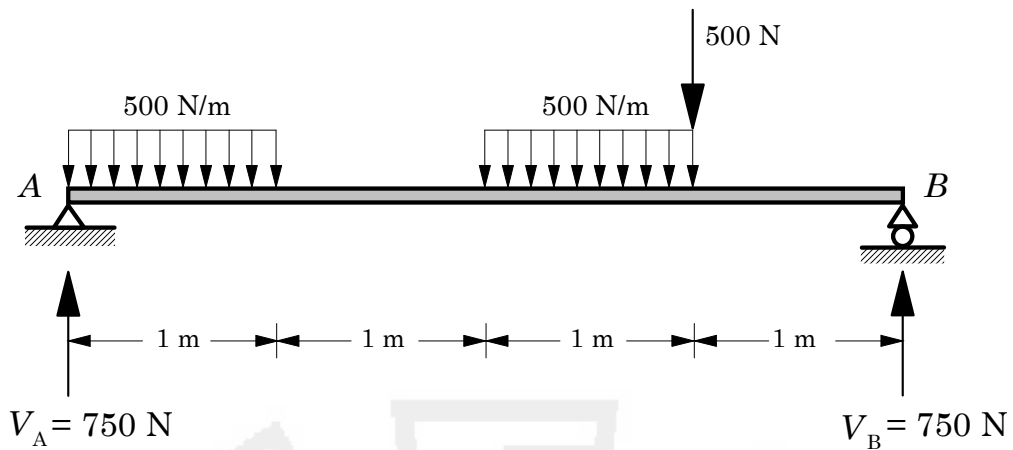
Μέγιστη ροπή:

θέση μέγιστης ροπής (μηδενισμός τέμνουσας): $x = \frac{220 \text{ N}}{60 \text{ N/m}} = 3.67 \text{ m}$ (από το A)

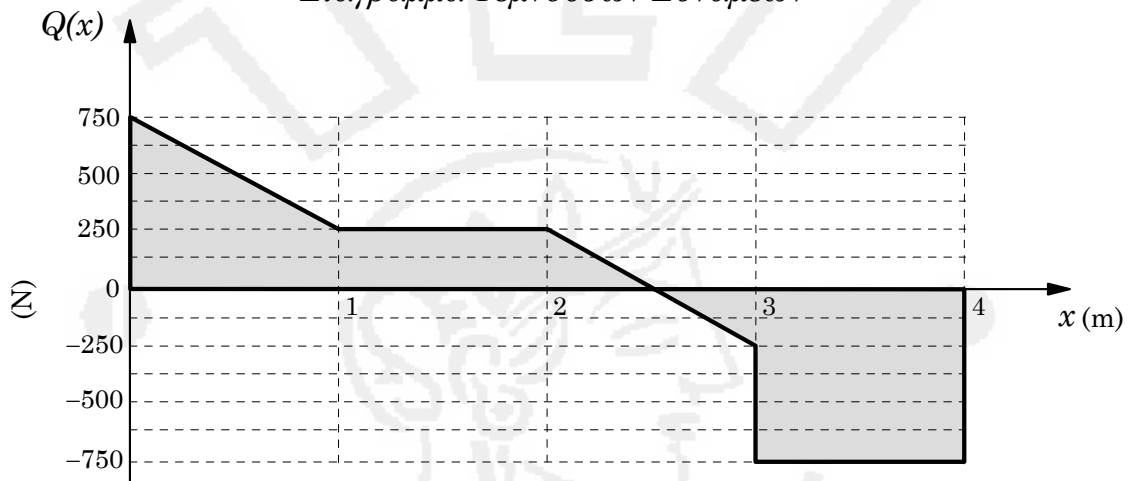
$M_{max} = (\text{ροπή στο A}) + (\text{εμβαδόν διαγράμ. Q από το A έως } x = 3.67 \text{ m})$

$\Rightarrow M_{max} = 0 + \frac{1}{2} 220 \text{ N } 3.67 \text{ m} \Rightarrow \underline{M_{max} = +403.33 \text{ Nm}}$

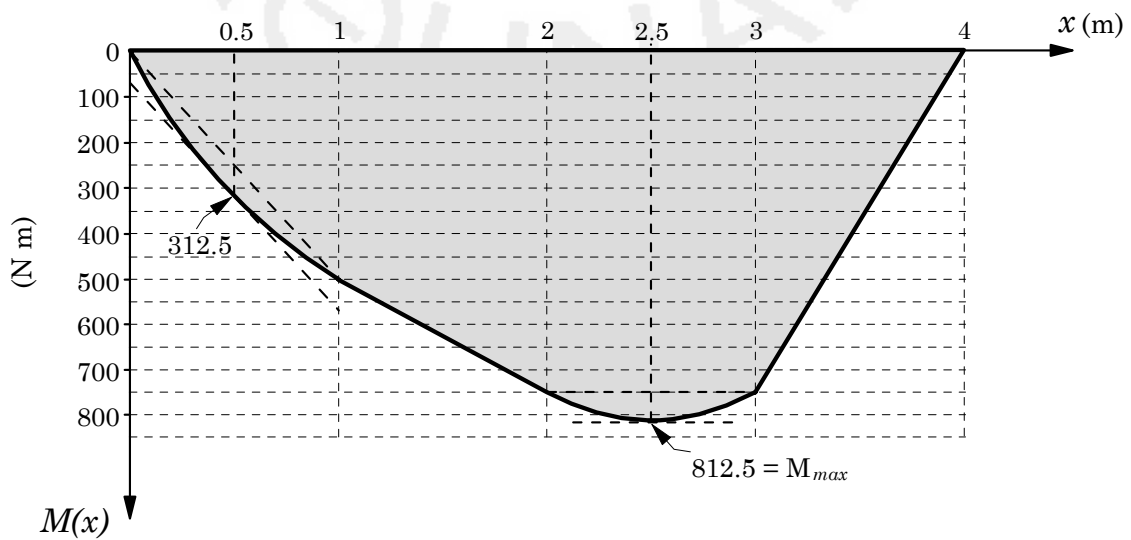
Άσκηση 2



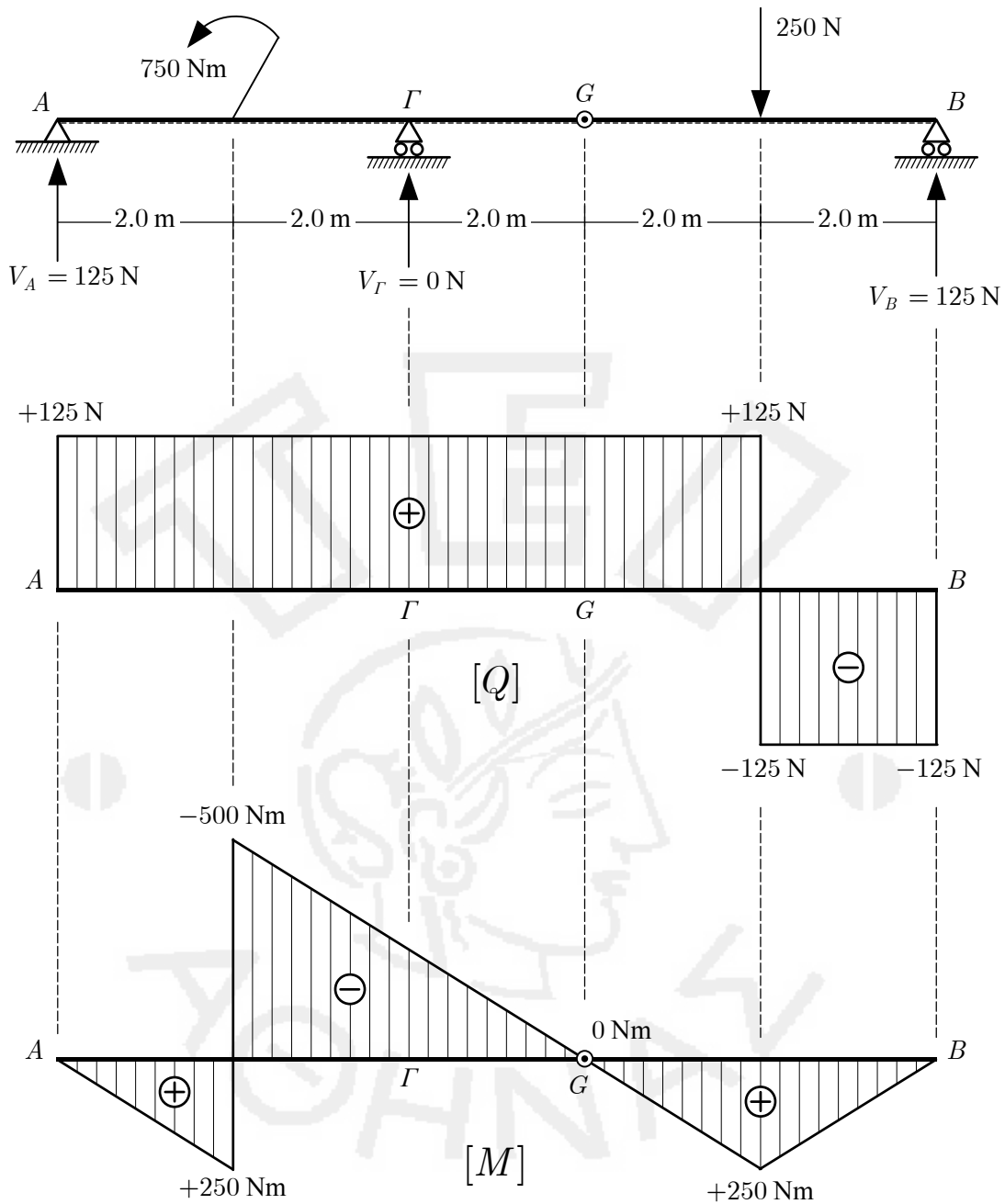
Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων



Διάγραμμα Ροπών Κάμψης



Άσκηση 3

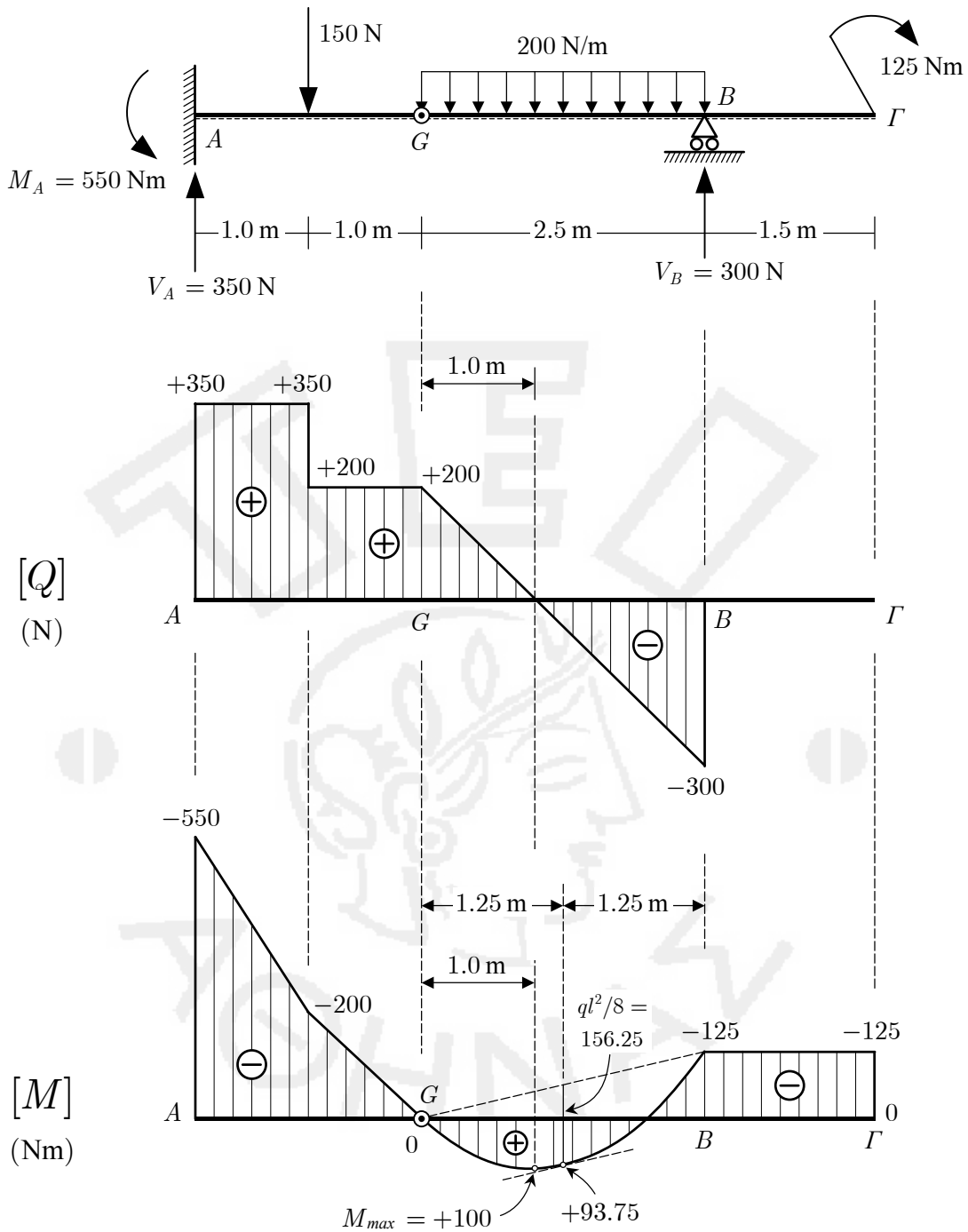


Αντιδράσεις: $\Sigma M_G^{\delta\epsilon\zeta} = 0 \Rightarrow -4V_B + 2 \times 250 = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 125 \text{ N}}$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -750 - 4V_\Gamma + 8 \times 250 - 10 \times V_B = 0 \Rightarrow \underline{V_\Gamma = 0 \text{ N}}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B + V_\Gamma - 250 = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 125 \text{ N}}$

Άσκηση 4



Αντιδράσεις: $\Sigma M_G^{\delta\epsilon\epsilon} = 0 \Rightarrow -2.5V_B + 1.25 \times (2.5 \times 200) + 125 = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 300 \text{ N}}$

$\Sigma M_A = -M_A + 1 \times 150 + 3.25 \times (2.5 \times 200) - 4.5 \times V_B + 125 = 0 \Rightarrow \underline{M_A = 550 \text{ Nm}}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 150 - 2.5 \times 200 = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 350 \text{ N}}$

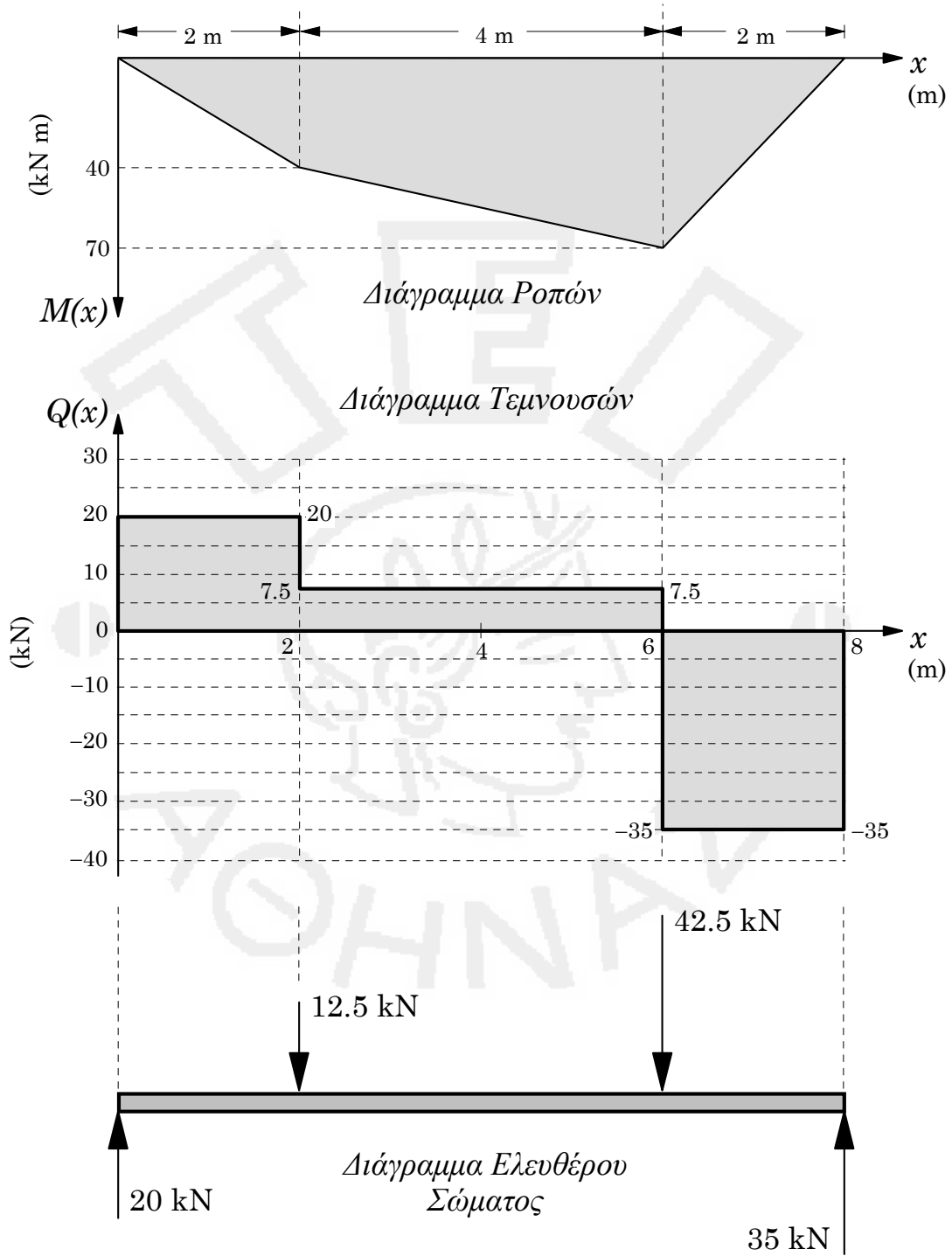
Μέγιστη ροπή: στη θέση $x = 200 \text{ N} / (200 \text{ N/m}) = 1.0 \text{ m}$ από το G (μηδενισμός της Q)

$M_{max} = (\text{ροπή στο G}) + (\text{εμβαδόν διαγράμ. Q από το G έως } x = 1.0 \text{ m})$

$\Rightarrow M_{max} = 0 + \frac{1}{2} 200 \text{ N} \times 1.0 \text{ m} \Rightarrow \underline{M_{max} = +100 \text{ Nm}}$

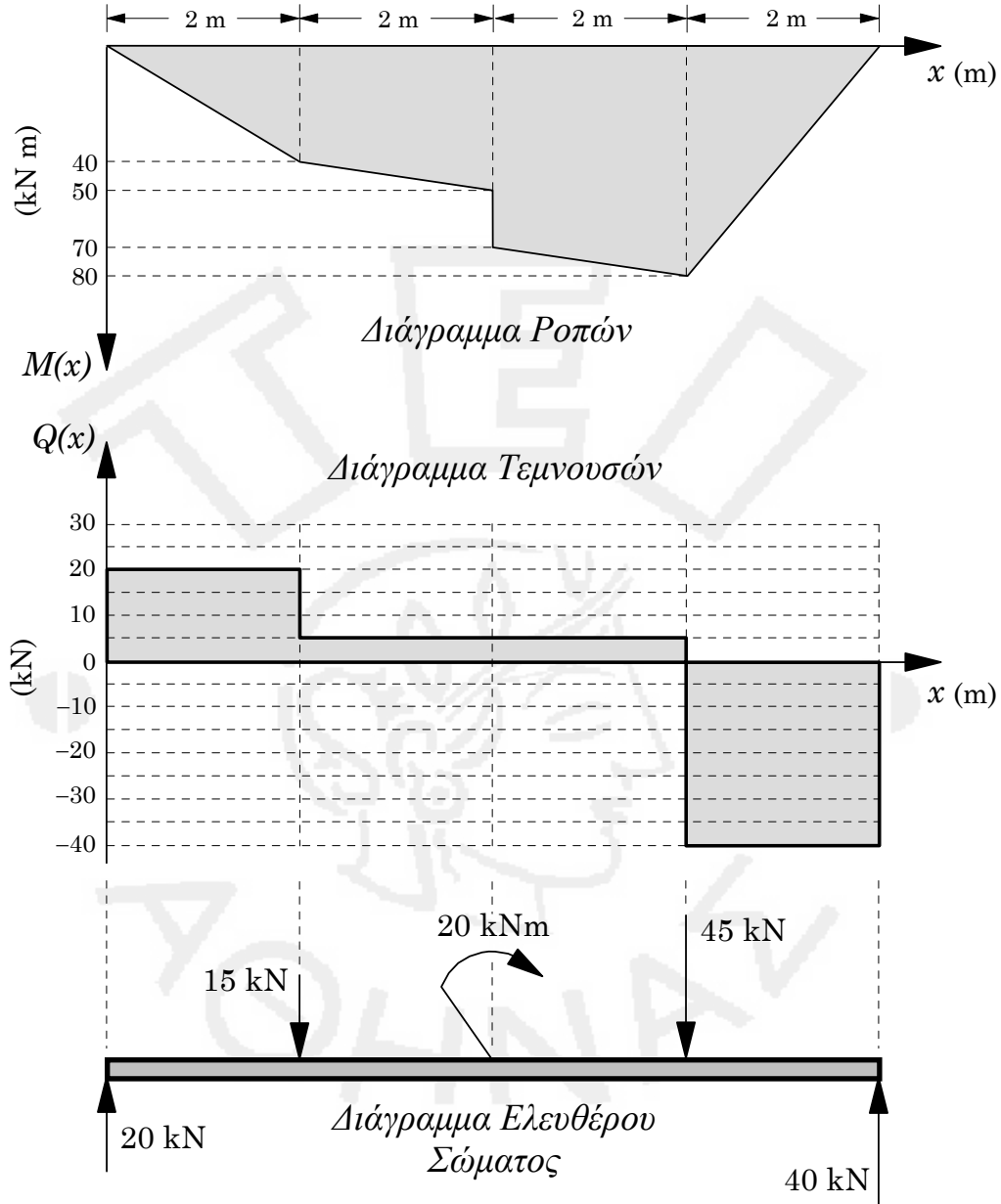
Άσκηση 5

Εάν δίνεται το διάγραμμα καμπτικών ροπών [M] της παρακάτω δοκού, να σχεδιασθεί το αντίστοιχο διάγραμμα τεμνουσών [Q] και να προσδιορισθεί η φόρτιση από την οποία παράγεται το συγκεκριμένο διάγραμμα ροπών.



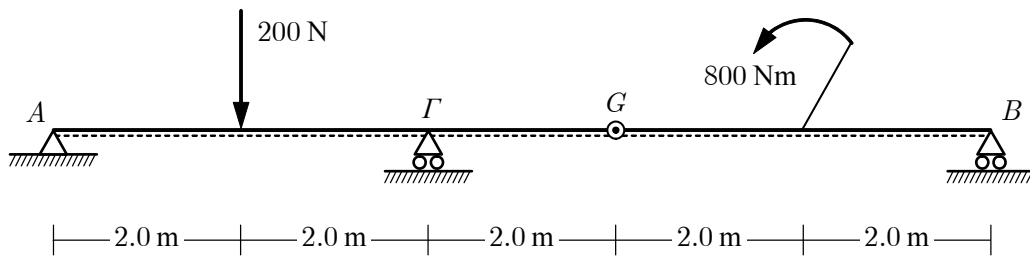
Άσκηση 6

Εάν δίνεται το διάγραμμα καμπτικών ροπών [M] της παρακάτω δοκού, να σχεδιασθεί το αντίστοιχο διάγραμμα τεμνουσών [Q] και να προσδιοριστεί η φόρτιση από την οποία παράγεται το συγκεκριμένο διάγραμμα ροπών.



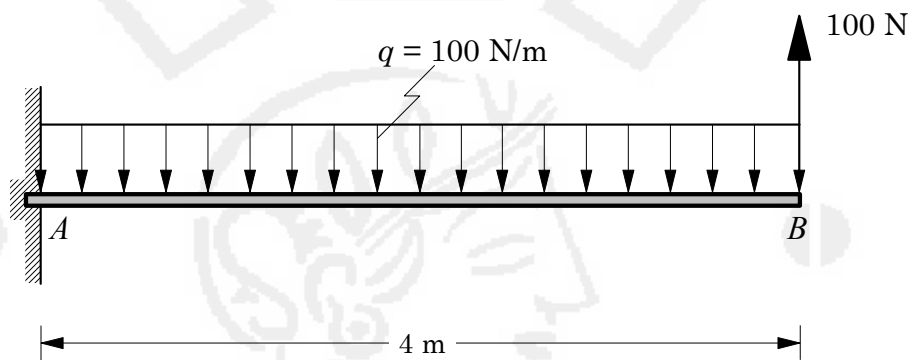
Άσκηση 7

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [Q] και [M] για τη δοκό AB του σχήματος.



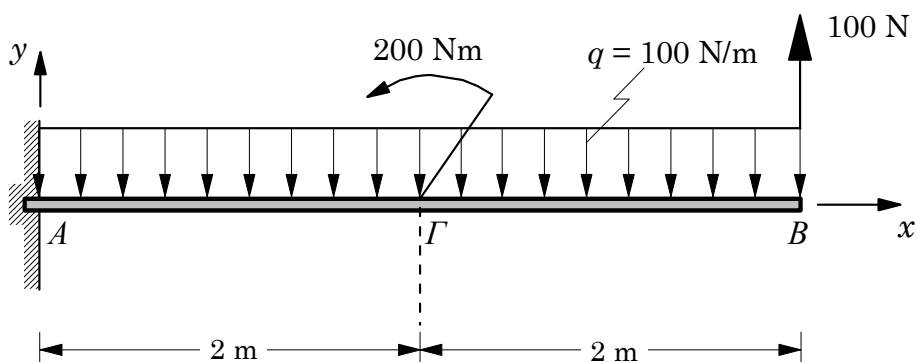
Άσκηση 8

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [Q] και [M] για τη δοκό του σχήματος. Να προσδιορισθεί η τιμή της μέγιστης καμπτικής ροπής M_{max} , καθώς και η θέση όπου εμφανίζεται.



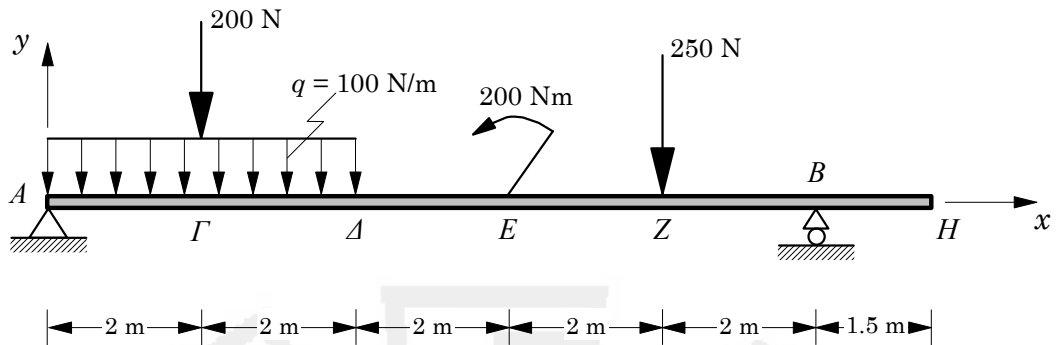
Άσκηση 9

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [Q] και [M] για τη δοκό του σχήματος. Να προσδιορισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης καμπτικής ροπής M_{max} .



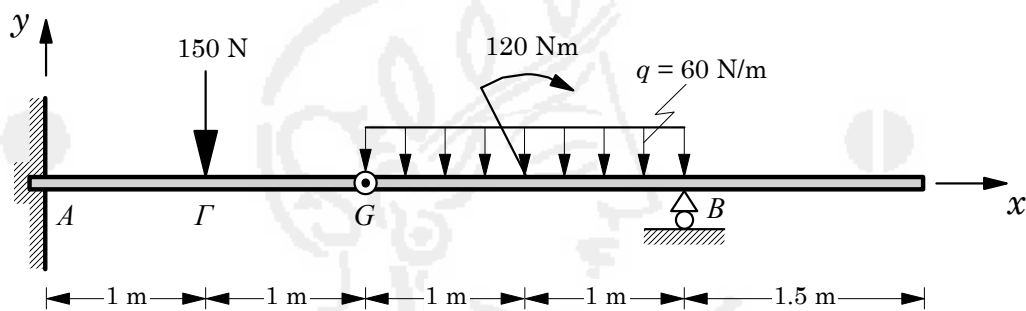
Άσκηση 10

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [Q] και [M] για τη δοκό του σχήματος. Να προσδιορισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης καμπτικής ροπής M_{max} .



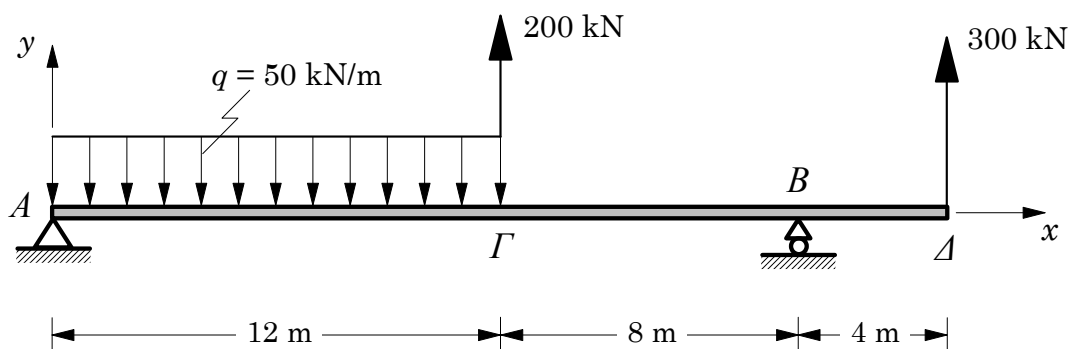
Άσκηση 11

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [Q] και [M] για τη δοκό του σχήματος.



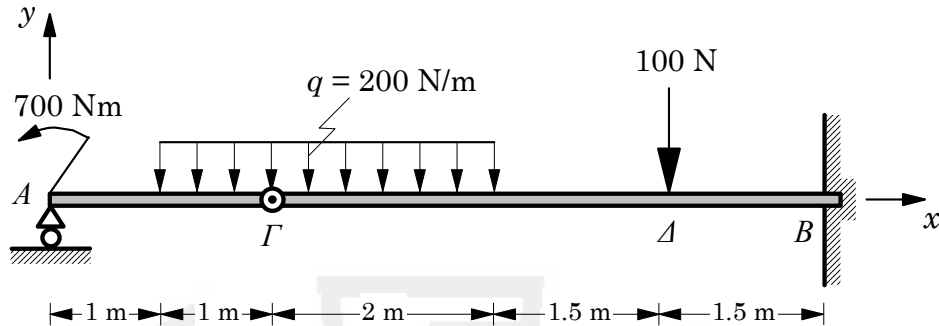
Άσκηση 12

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών και καμπτικών ροπών του φορέα. Να υπολογισθεί η μέγιστη καμπτική ροπή και να προσδιορισθεί η θέση που εμφανίζεται αυτή.



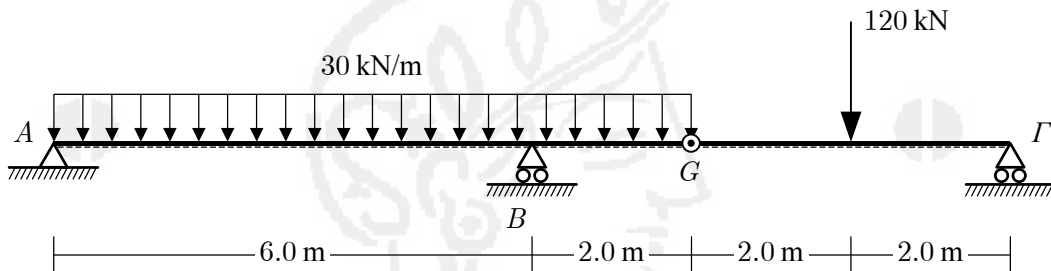
Άσκηση 13

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών και καμπτικών ροπών του φορέα. Να υπολογισθεί η μέγιστη καμπτική ροπή και να προσδιορισθεί η θέση που εμφανίζεται αυτή.



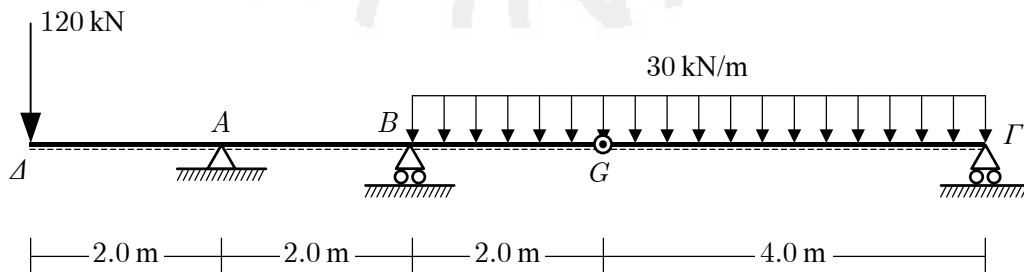
Άσκηση 14

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του φορέα. Να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης θετικής καμπτικής ροπής.



Άσκηση 15

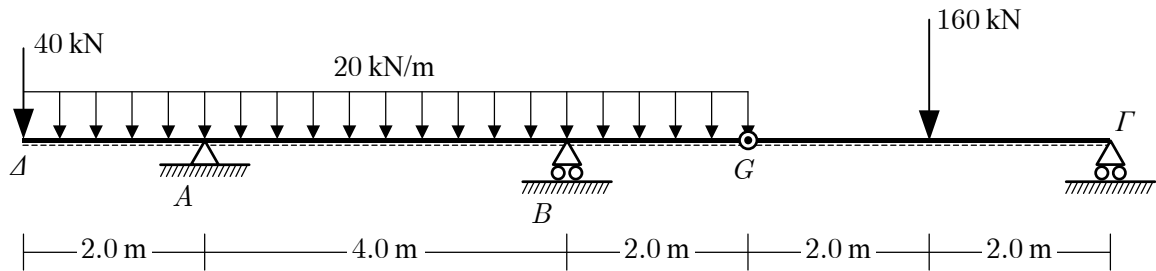
Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του φορέα.



Απαντήσεις: $M_A = -240 \text{ kNm}$, $M_B = -180 \text{ kNm}$, $M_{x=7\text{m}} = +45 \text{ kNm}$,
 $M_{\max} = +60 \text{ kNm}$ στη θέση $x = 8 \text{ m}$.

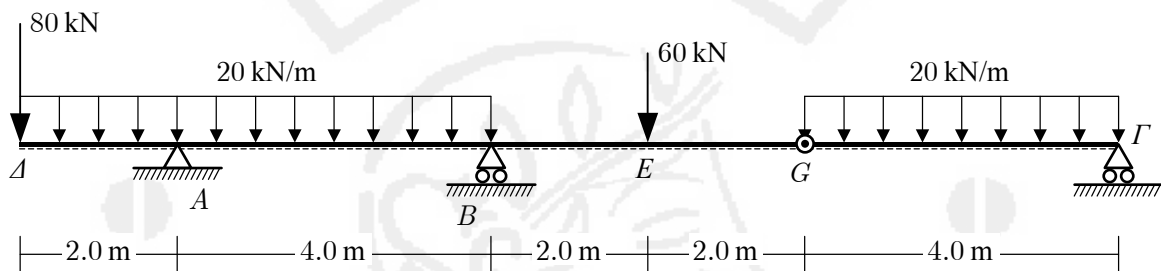
Άσκηση 16

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του φορέα και να προσδιορισθεί η μέγιστη θετική ροπή (τιμή και θέση).



Άσκηση 17

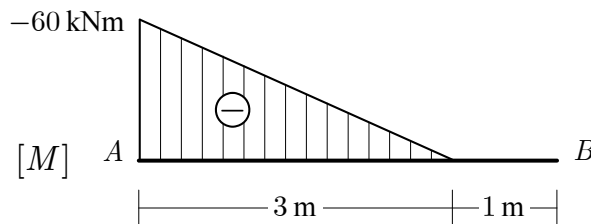
Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του φορέα και να προσδιορισθούν οι μέγιστες ροπές (τιμή και θέση).



Απαντήσεις: $M_A = -200 \text{ kNm}$, $M_B = -280 \text{ kNm}$, $M_E = -80 \text{ kNm}$,
 $M_{\max} = -190 \text{ kNm}$ στη θέση $x = 1 \text{ m}$ δεξιά του A και
 $M_{\max} = +40 \text{ kNm}$ στη θέση $x = 2 \text{ m}$ δεξιά του G .

Άσκηση 18

Εάν δίνεται το διάγραμμα καμπτικών ροπών [M] της δοκού AB, να σχεδιασθεί το αντίστοιχο διάγραμμα τεμνουσών [Q] και να προσδιορισθεί η φόρτιση από την οποία παράγεται το συγκεκριμένο διάγραμμα ροπών.

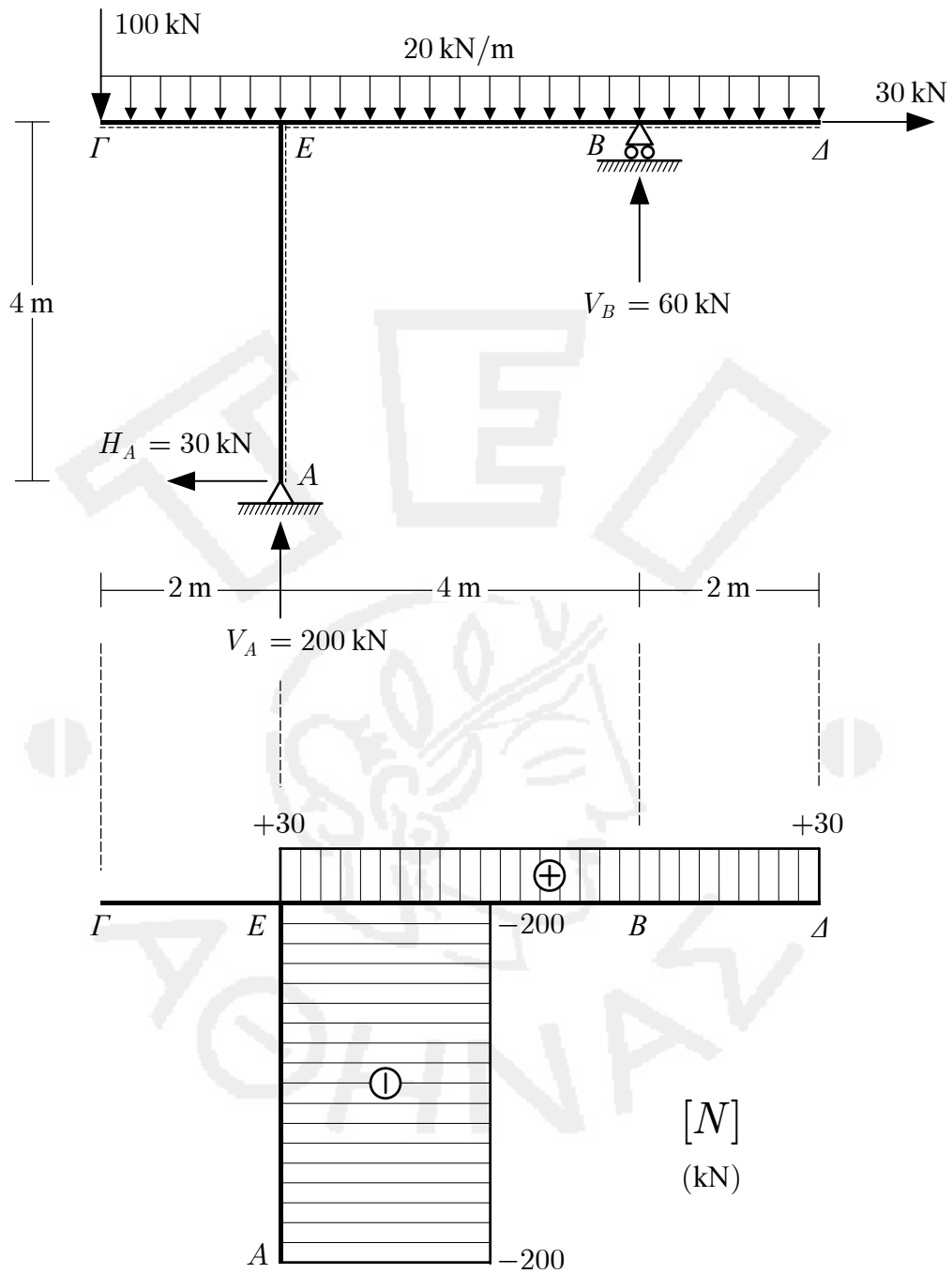


Μέρος 2^ο

Διαγράμματα M , Q , N σε πλαίσια

Άσκηση 19

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [N], [Q] και [M] του παρακάτω πλαισίου.

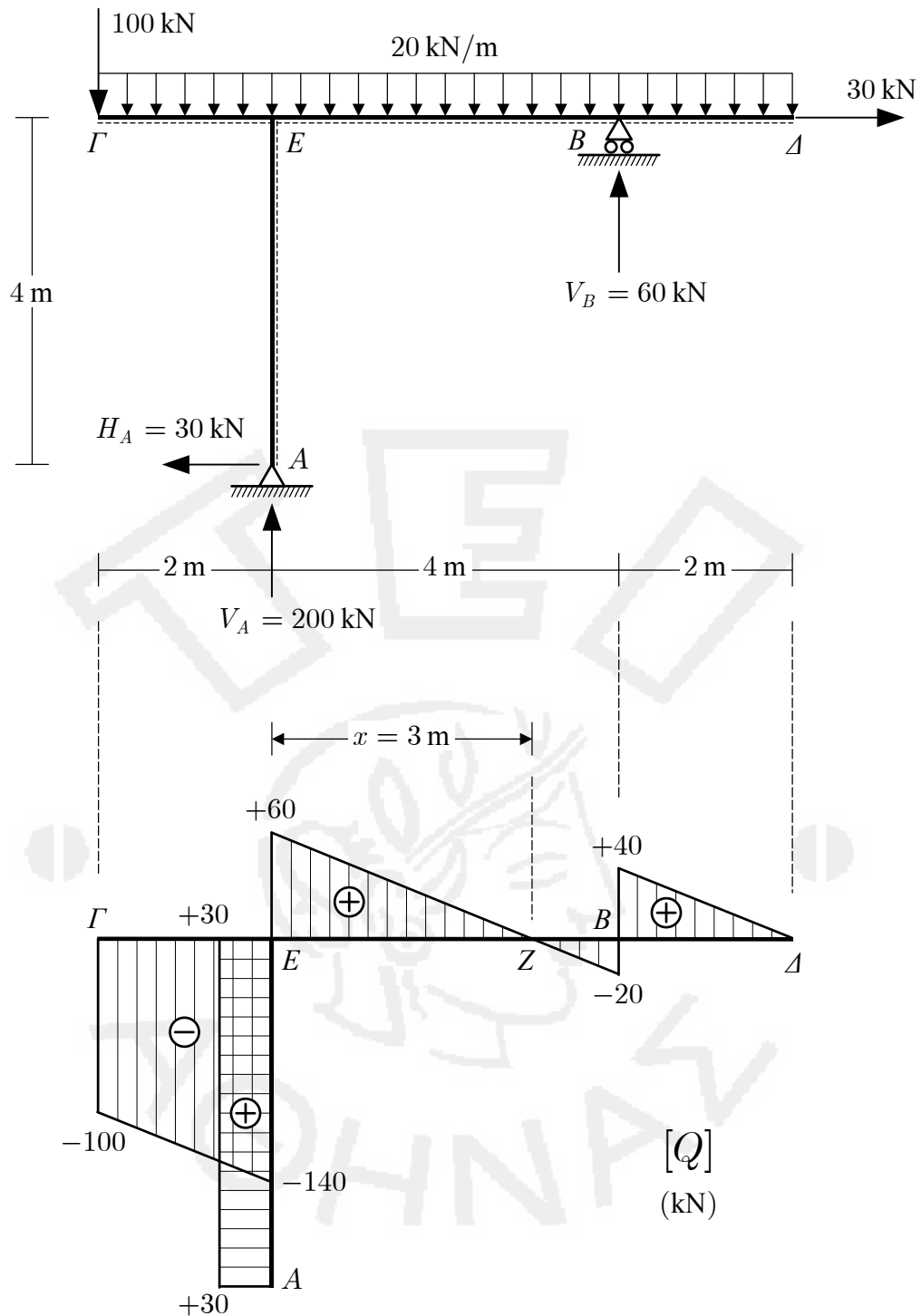


Αντιδράσεις στηρίξεων:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 30 = 0 \Rightarrow H_A = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -2 \times 100 - 4V_B + 4 \times 30 + 2 \times (8 \times 20) = 0 \Rightarrow V_B = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 100 - 8 \times 20 = 0 \Rightarrow V_A = 200 \text{ kN}$$



Μέγιστη ροπή:

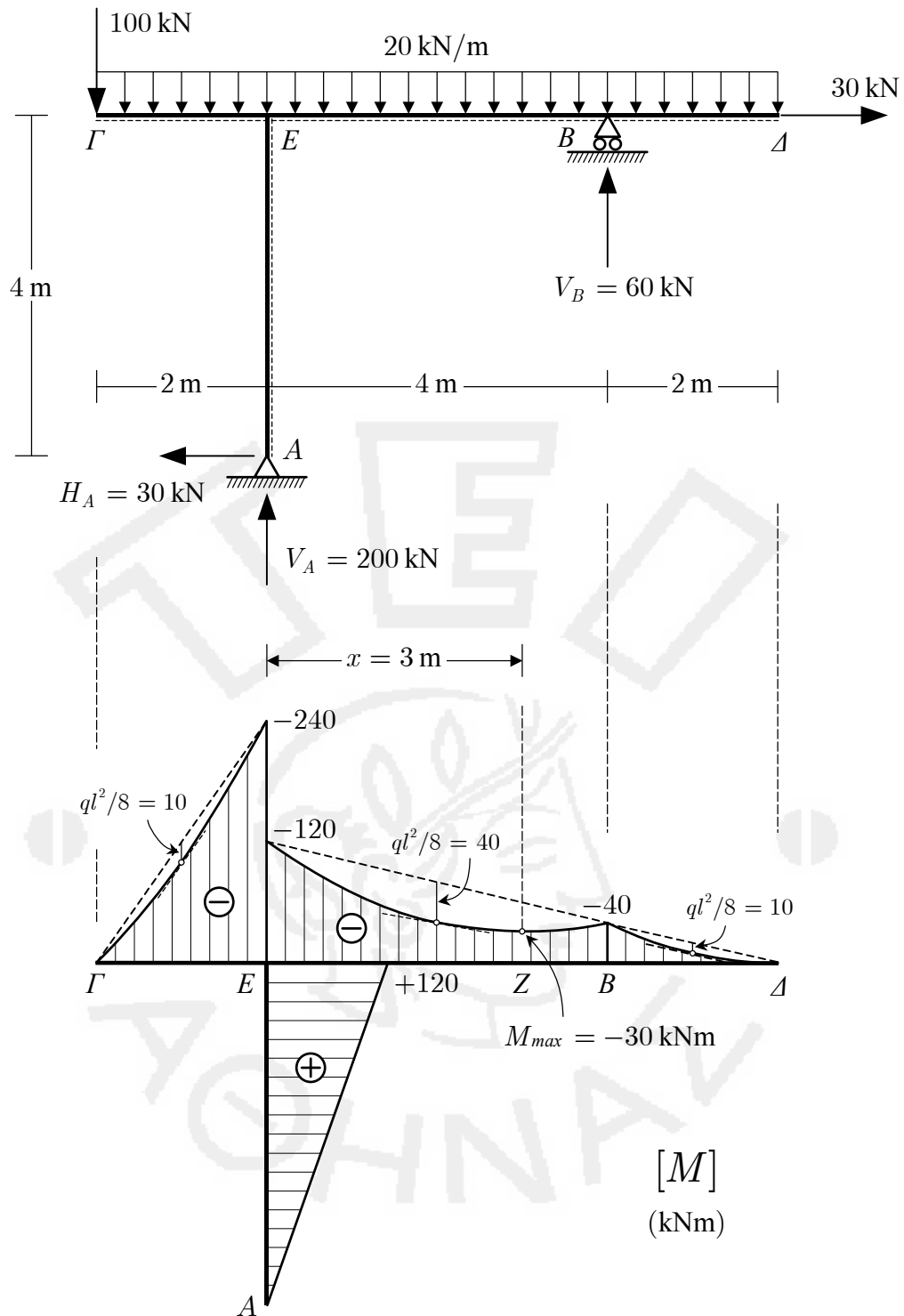
Θέση της μέγιστης ροπής (δηλ. σημείο μηδενισμού της τέμνουσας):

$$x = \frac{60 \text{ kN}}{20 \text{ kN/m}} = 3.0 \text{ m} \quad (\text{αριστερά του } E)$$

Υπολογισμός της μέγιστης ροπής:

$M_{max} = (\text{ροπή δεξιά του κόμβου } E) + (\text{εμβαδόν διαγράμ. } Q \text{ από το } E \text{ έως το } Z)$

$$\Rightarrow M_{max} = -120 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 60 \text{ kN} \times 3.0 \text{ m} \Rightarrow \underline{M_{max} = -30.0 \text{ kNm}}$$



Τιμές της καμπτικής ροπής στο:

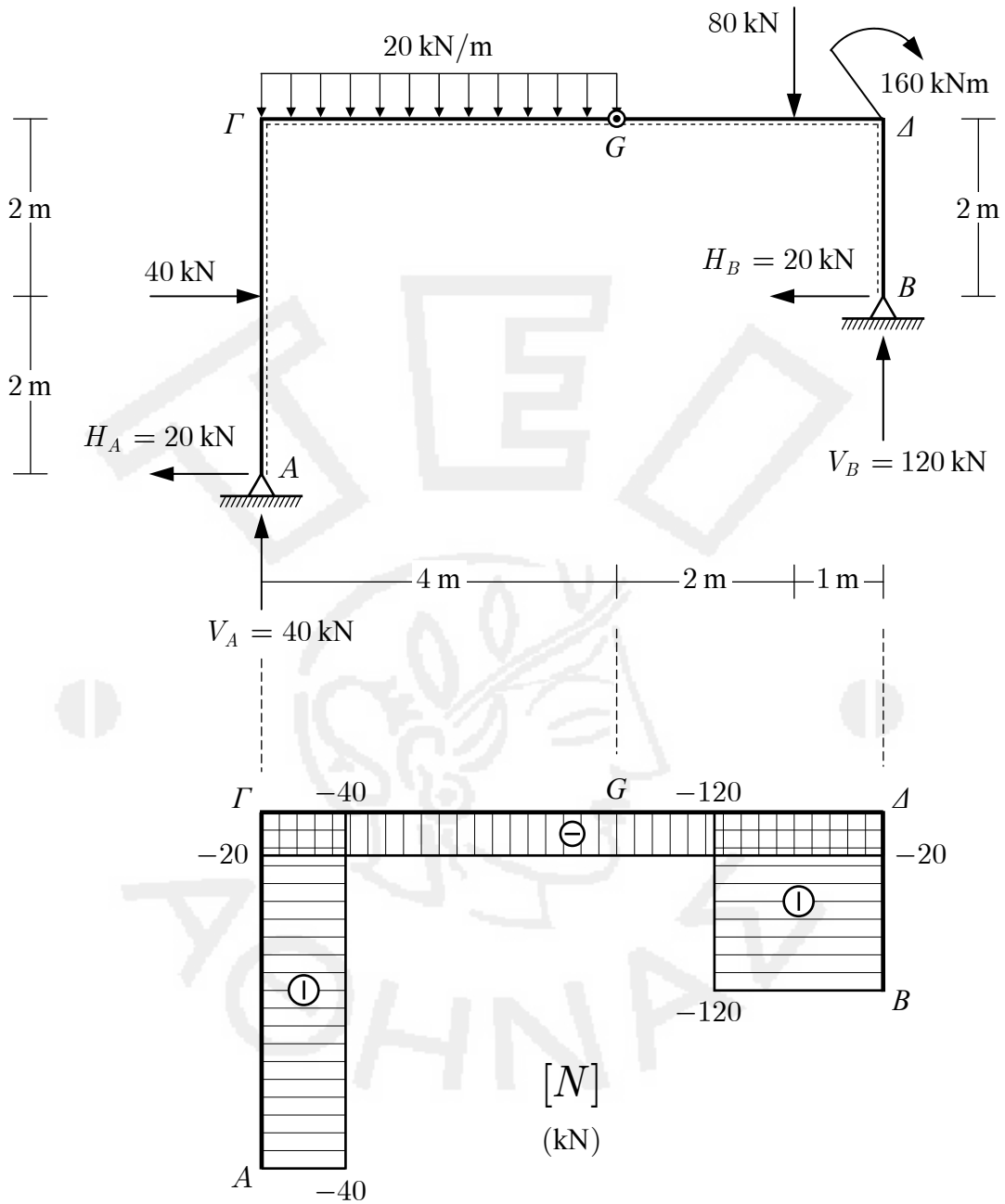
$$\text{μέσον του ΓΕ: } \frac{-240 \text{ kNm}}{2} + \frac{q l_{GE}^2}{8} = -120 \text{ kNm} + \frac{20 \text{ kN/m} \times (2 \text{ m})^2}{8} = \underline{-110 \text{ kNm}}$$

$$\text{μέσον του ΕΒ: } \frac{(-120 - 40) \text{ kNm}}{2} + \frac{q l_{EB}^2}{8} = -80 \text{ kNm} + \frac{20 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2}{8} = \underline{-40 \text{ kNm}}$$

$$\text{μέσον του ΒΔ: } \frac{-40 \text{ kNm}}{2} + \frac{q l_{BA}^2}{8} = -20 \text{ kNm} + \frac{20 \text{ kN/m} \times (2 \text{ m})^2}{8} = \underline{-10 \text{ kNm}}$$

Άσκηση 20

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [N], [Q] και [M] του παρακάτω πλαισίου.



Αντιδράσεις:

$$\sum M_G^{\delta \xi} = 0 \Rightarrow -3V_B + 2H_B + 2 \times 80 + 160 = 0 \Rightarrow \underline{3V_B - 2H_B = 320} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow 2 \times 40 + 2 \times (4 \times 20) + 6 \times 80 + 160 - 7V_B - 2H_B = 0 \\ &\Rightarrow \underline{7V_B + 2H_B = 880} \quad (2) \end{aligned}$$

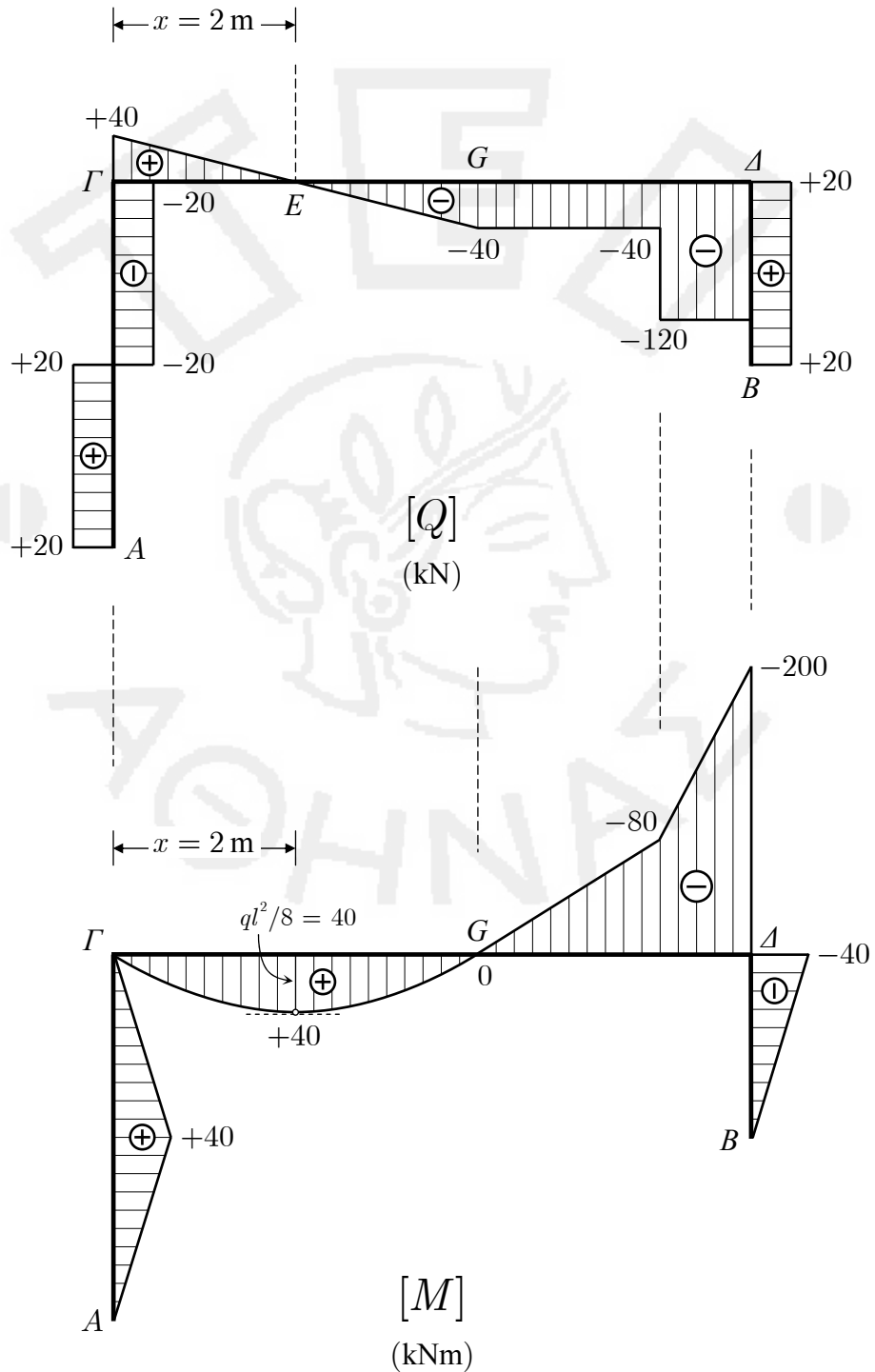
Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\underline{V_B = 120 \text{ kN}} \quad \text{και} \quad \underline{H_B = 20 \text{ kN}}$$

Επιπλέον είναι:

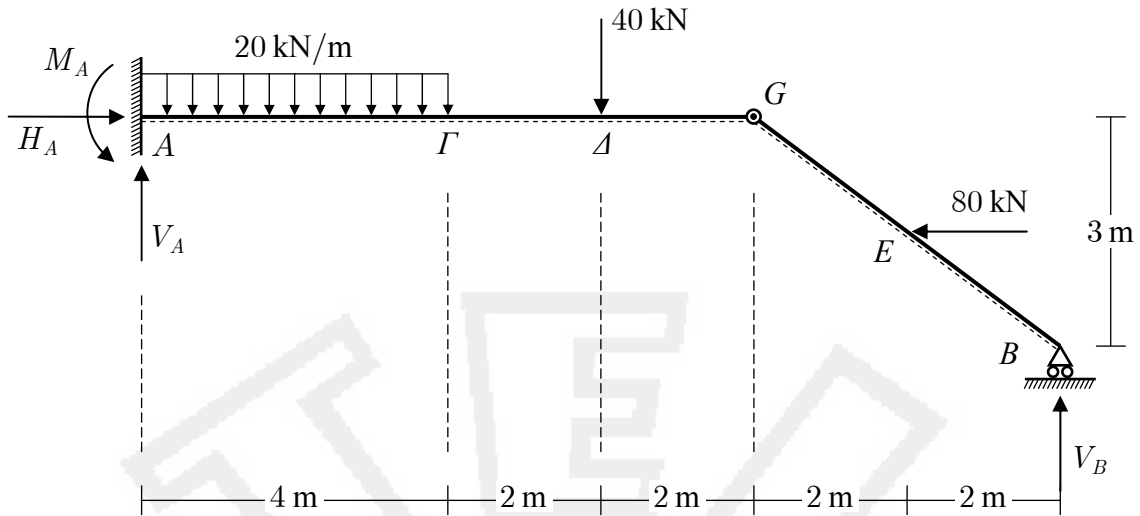
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 4 \times 20 - 80 = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 40 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -H_A - H_B + 40 = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 20 \text{ kN}}$$



Άσκηση 21

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [N], [Q] και [M] του παρακάτω πλαισίου.



Αντιδράσεις:

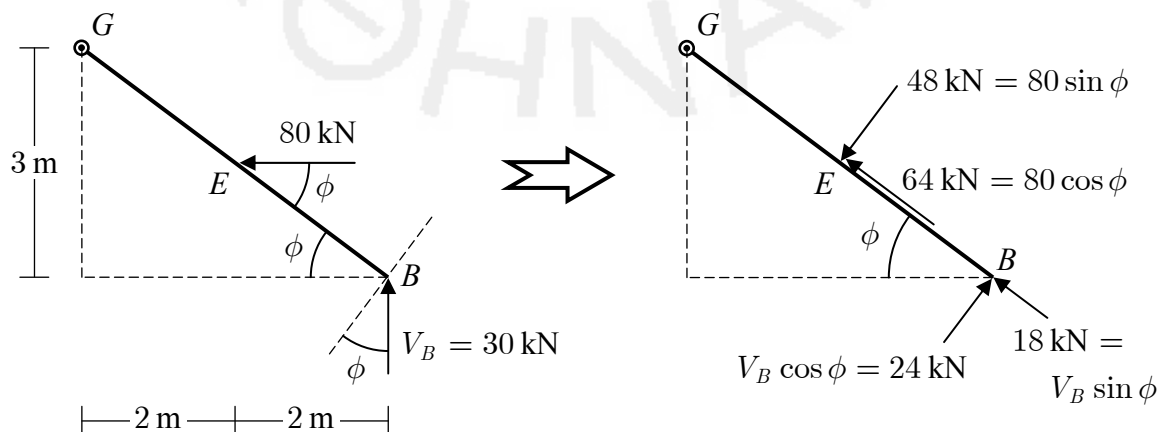
$$\sum M_G^{\delta \epsilon \zeta} = 0 \Rightarrow -4V_B + 1.5 \times 80 = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 30 \text{ kN}}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -M_A + 2 \times (4 \times 20) + 6 \times 40 + 1.5 \times 80 - 12V_B = 0 \\ &\Rightarrow \underline{M_A = 160 \text{ kNm}} \end{aligned}$$

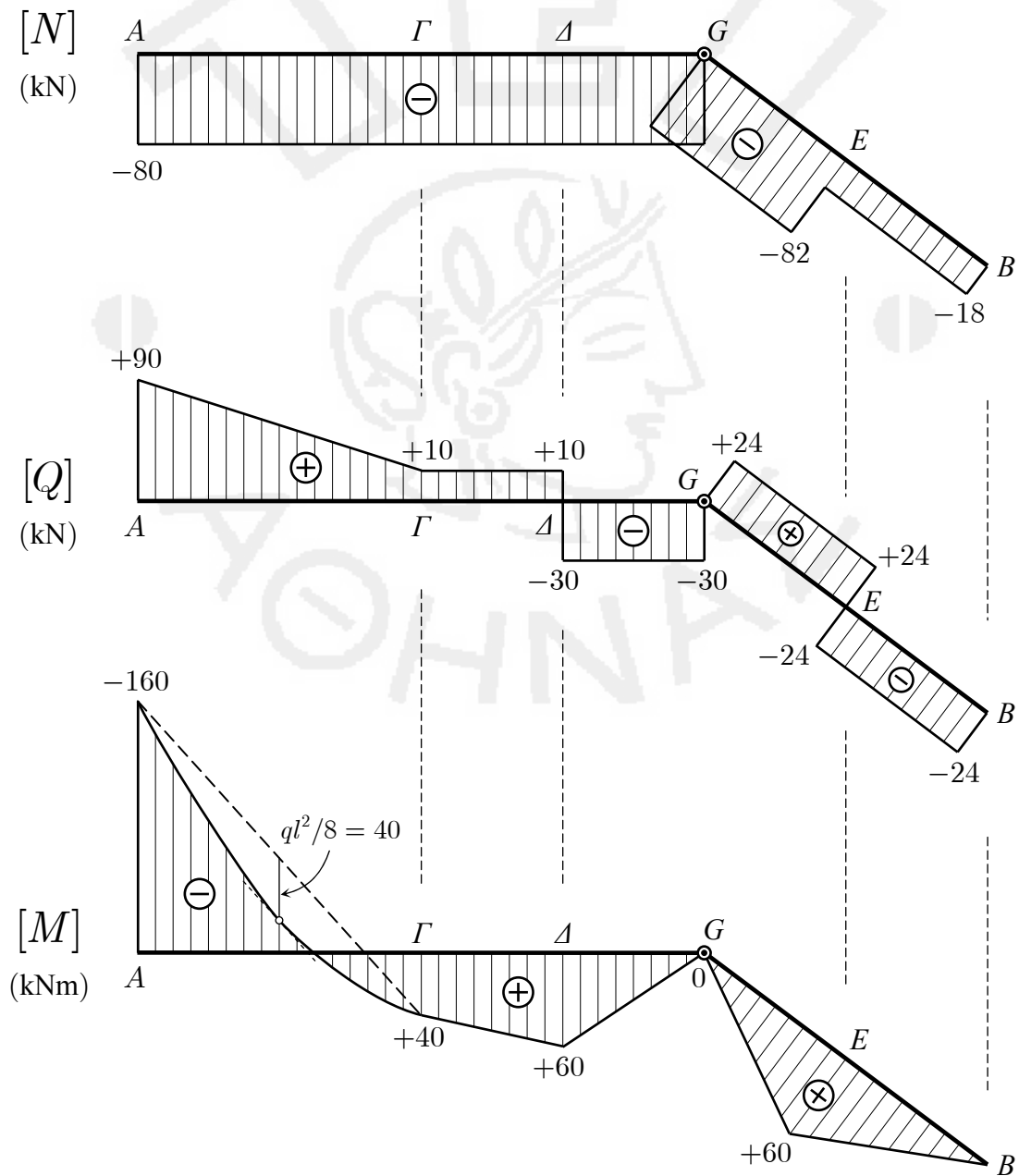
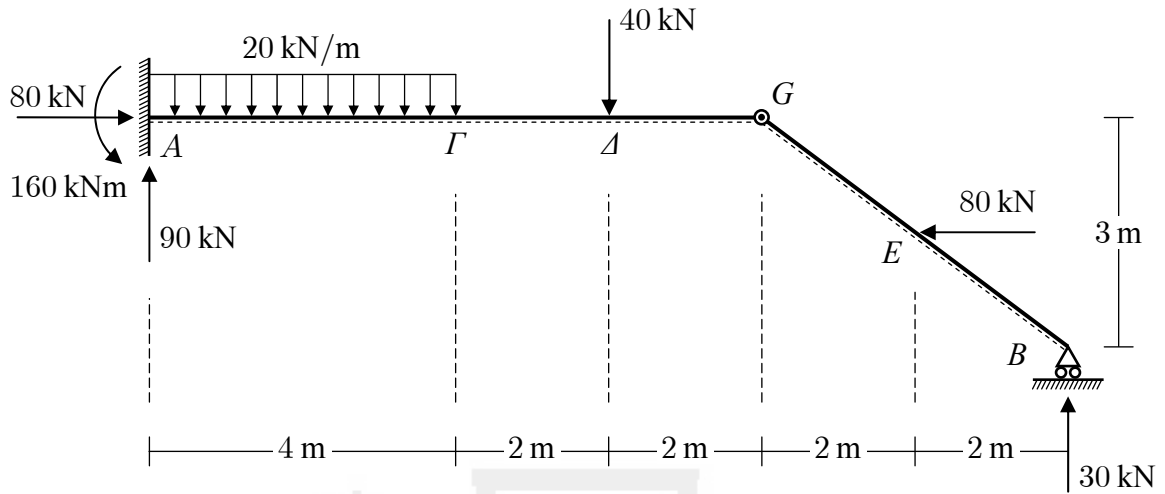
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 80 = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 80 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 4 \times 20 - 40 + V_B = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 90 \text{ kN}}$$

Ανάλυση δυνάμεων στο λοξό μέλος

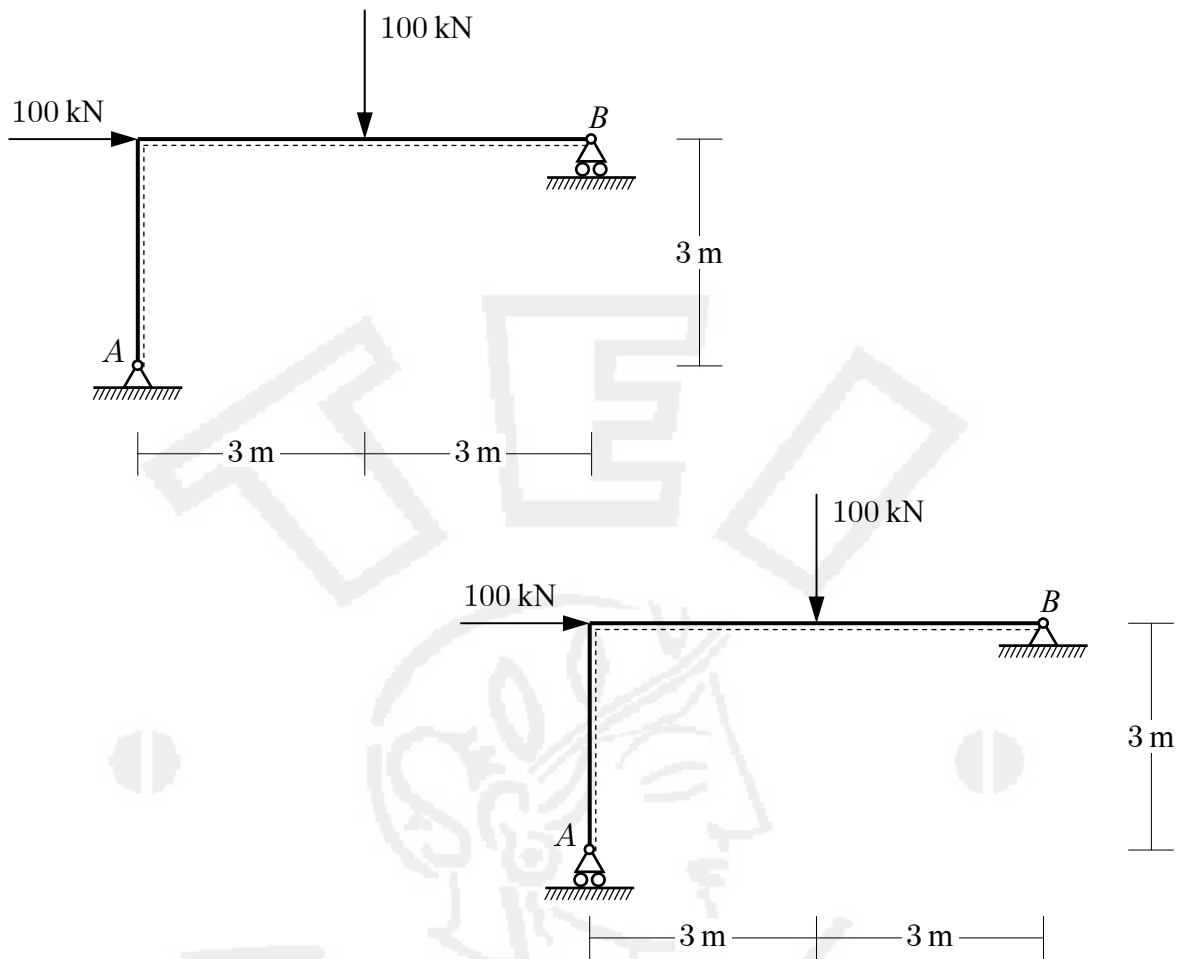


$$l_{GB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} \sin \phi = 3/5 = 0.6 \\ \cos \phi = 4/5 = 0.8 \end{cases}$$



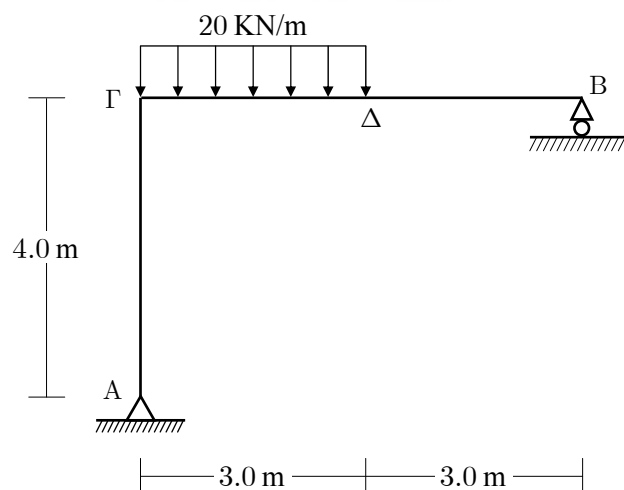
Άσκηση 22

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών [N], τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] των φορέων.



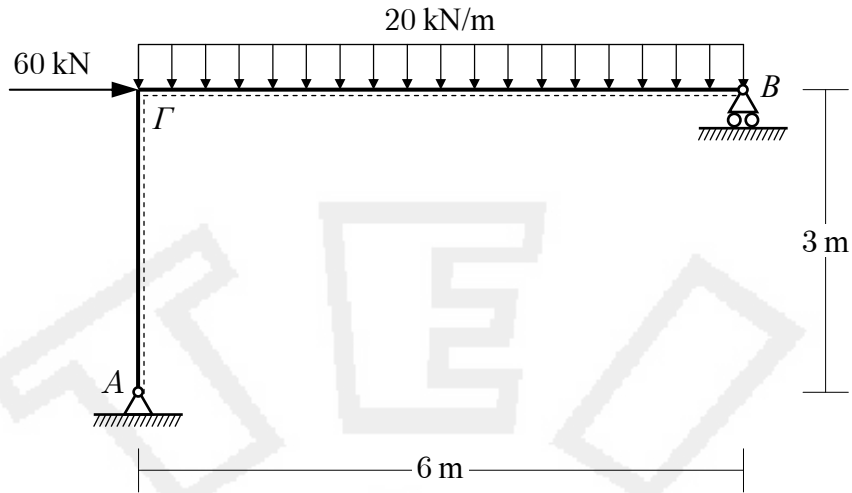
Άσκηση 23

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [N], [Q] και [M] του παρακάτω πλαισίου.



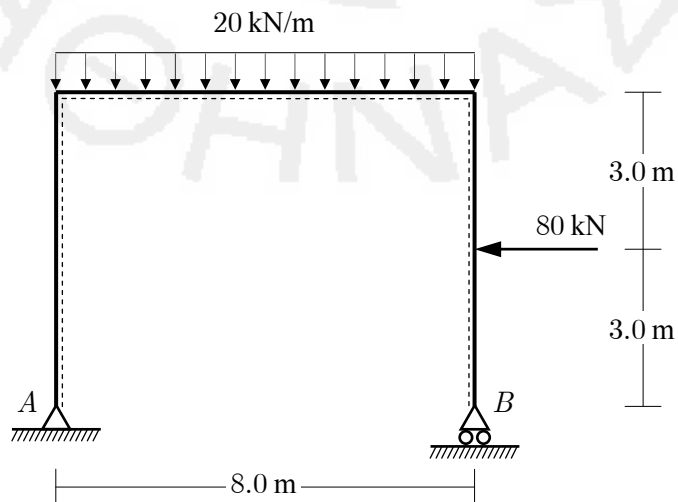
Άσκηση 24

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισίου. Επιπλέον, να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης ροπής στο ζύγωμα ΓΒ.



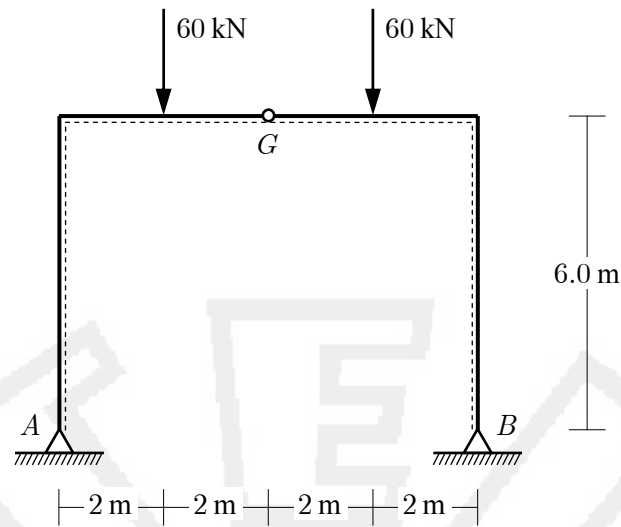
Άσκηση 25

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [N], [Q] και [M] του παρακάτω πλαισίου.



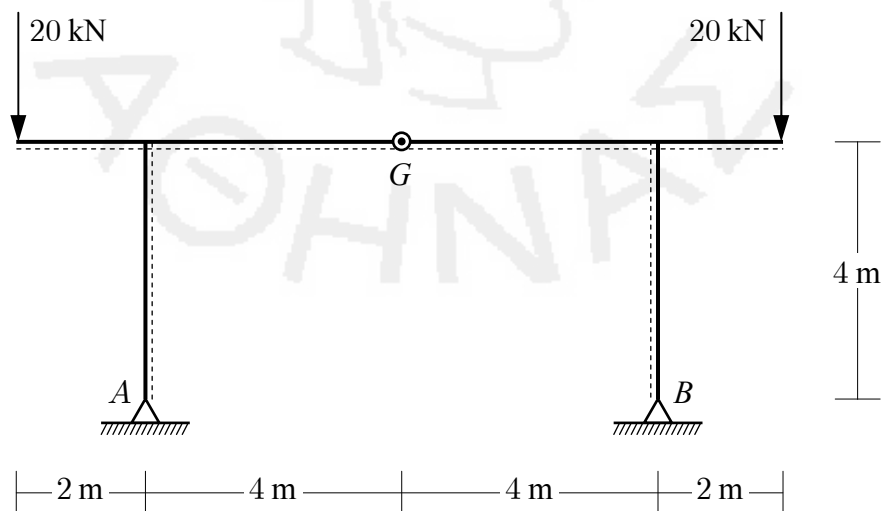
Άσκηση 26

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα $[N]$, $[Q]$ και $[M]$ του τριαρθρωτού τόξου AGB .



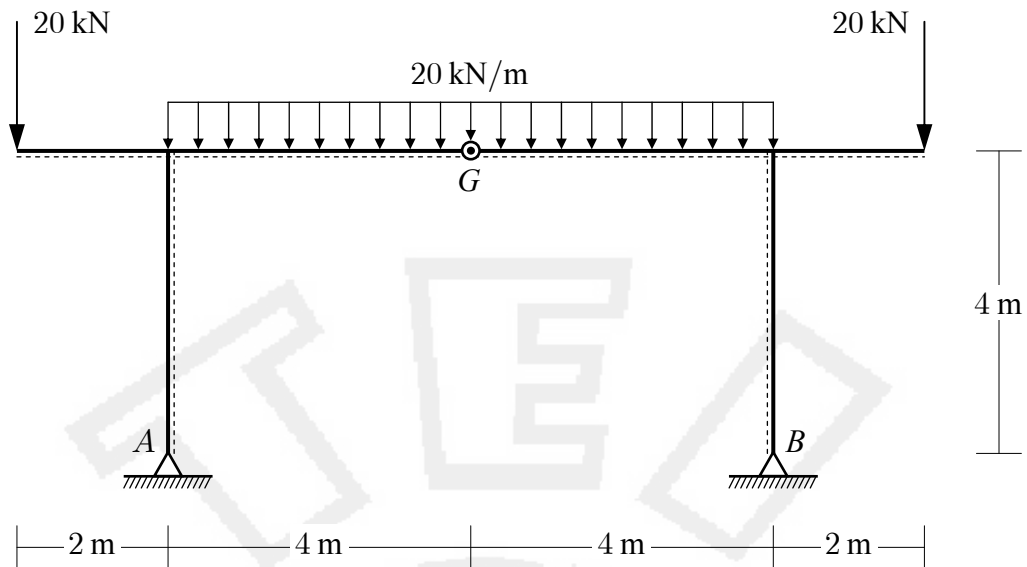
Άσκηση 27

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα $[N]$, $[Q]$ και $[M]$ του παρακάτω πλαισίου.



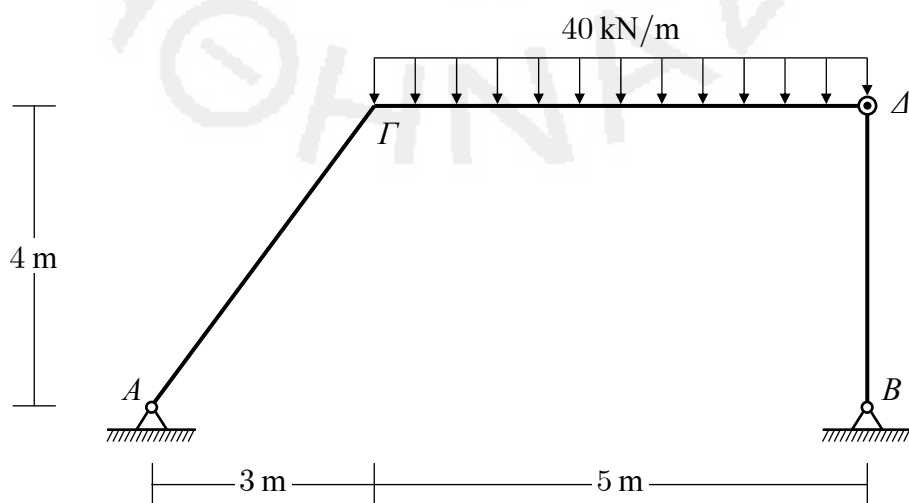
Άσκηση 28

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών [N], τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του φορέα.



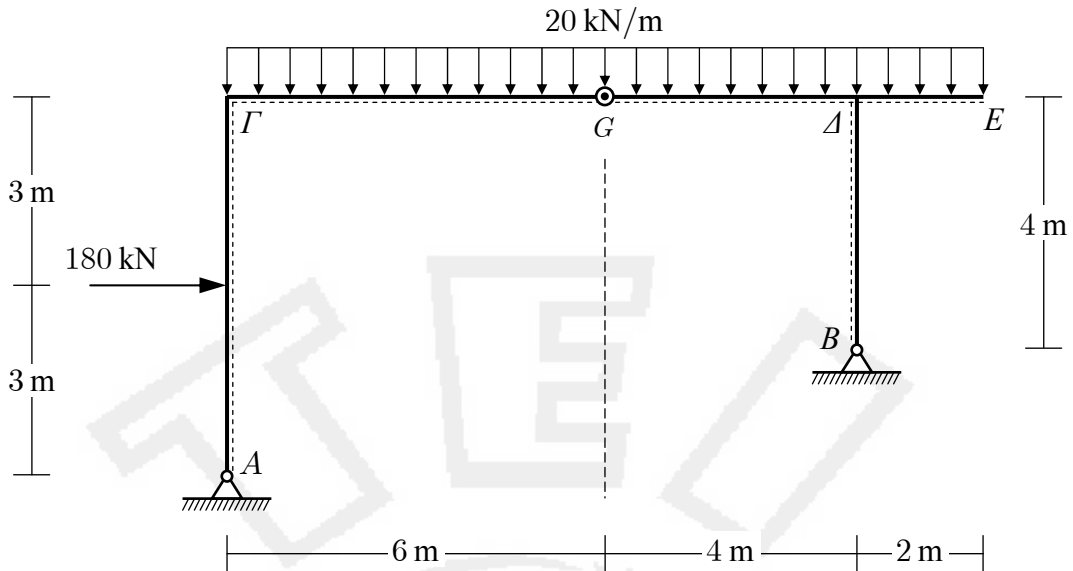
Άσκηση 29

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα [N], [Q] και [M] του παρακάτω πλαισίου.



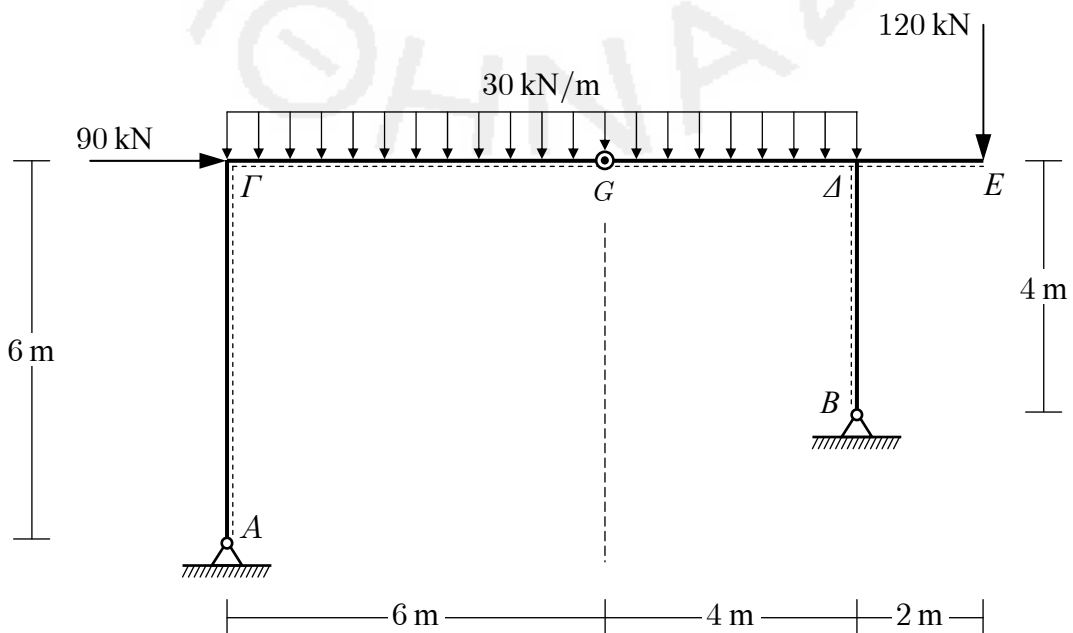
Άσκηση 30

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών [N], τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του φορέα.



Άσκηση 31

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών [N], τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του τριαρθρωτού πλαισίου.



Άσκηση 30 (απαντήσεις) :

$A_x = -90 \text{ kN}$, $A_y = 60 \text{ kN}$, $B_x = -90 \text{ kN}$, $B_y = 180 \text{ kN}$, $M_{y=3\text{m}} = +270 \text{ kNm}$,
 $M_G = 0 \text{ kNm}$, $M_{\Delta\Gamma} = -400 \text{ kNm}$, $M_{\Delta E} = -40 \text{ kNm}$, $M_{\Delta B} = -360 \text{ kNm}$,
 $M_{\max} = +90 \text{ kNm}$ στη θέση $x = 3 \text{ m}$ δεξιά του Γ .

Άσκησης 30 (παραλλαγή) :

Η ίδια άσκηση με οριζόντιο φορτίο 60 kN αντί 180 kN στο υποστήλωμα οδηγεί στα παρακάτω αποτελέσματα:

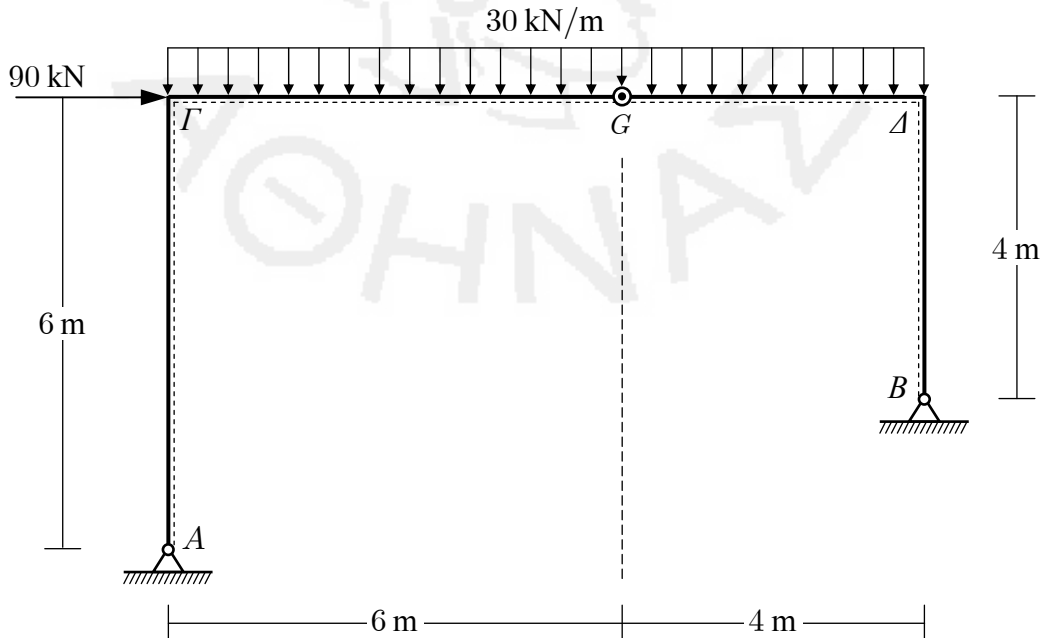
$A_x = 0 \text{ kN}$, $A_y = 90 \text{ kN}$, $B_x = -60 \text{ kN}$, $B_y = 150 \text{ kN}$, $M_{y=3\text{m}} = 0 \text{ kNm}$,
 $M_G = -180 \text{ kNm}$, $M_{\Delta\Gamma} = -280 \text{ kNm}$, $M_{\Delta E} = -40 \text{ kNm}$, $M_{\Delta B} = -240 \text{ kNm}$,
 $M_{\max} = +22.5 \text{ kNm}$ στη θέση $x = 4.5 \text{ m}$ δεξιά του Γ .

Άσκηση 31 (απαντήσεις) :

$A_x = 0 \text{ kN}$, $A_y = 90 \text{ kN}$, $B_x = -90 \text{ kN}$, $B_y = 330 \text{ kN}$, $M_{y=3\text{m}} = 0 \text{ kNm}$,
 $M_G = 0 \text{ kNm}$, $M_{\Delta\Gamma} = -600 \text{ kNm}$, $M_{\Delta E} = -240 \text{ kNm}$, $M_{\Delta B} = -360 \text{ kNm}$,
 $M_{\max} = +90 \text{ kNm}$ στη θέση $x = 3 \text{ m}$ δεξιά του Γ .

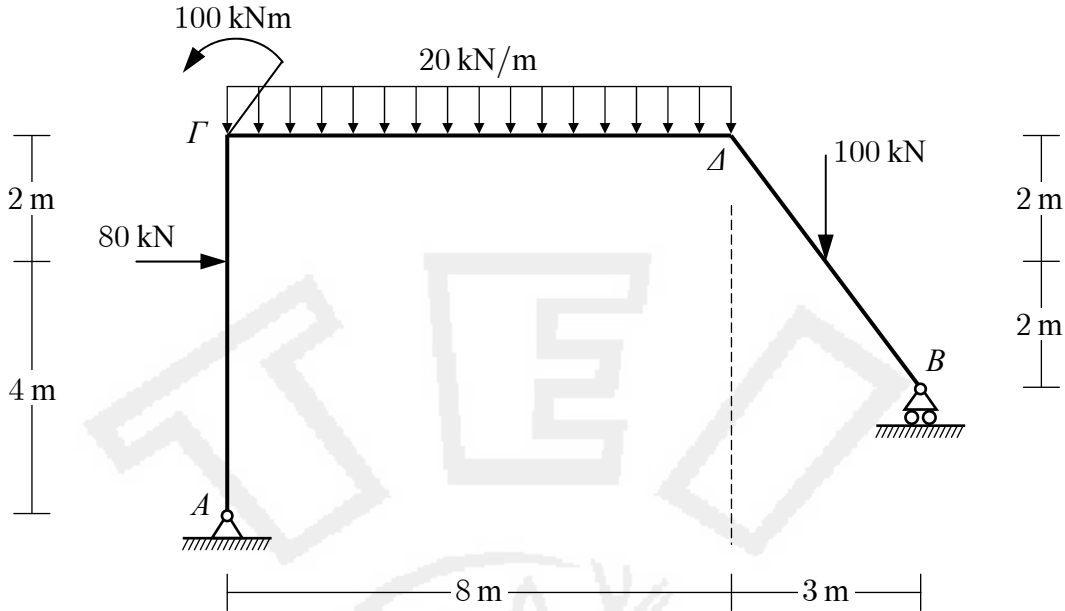
Άσκηση 32

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα $[N]$, $[Q]$ και $[M]$ του παρακάτω πλαισίου.



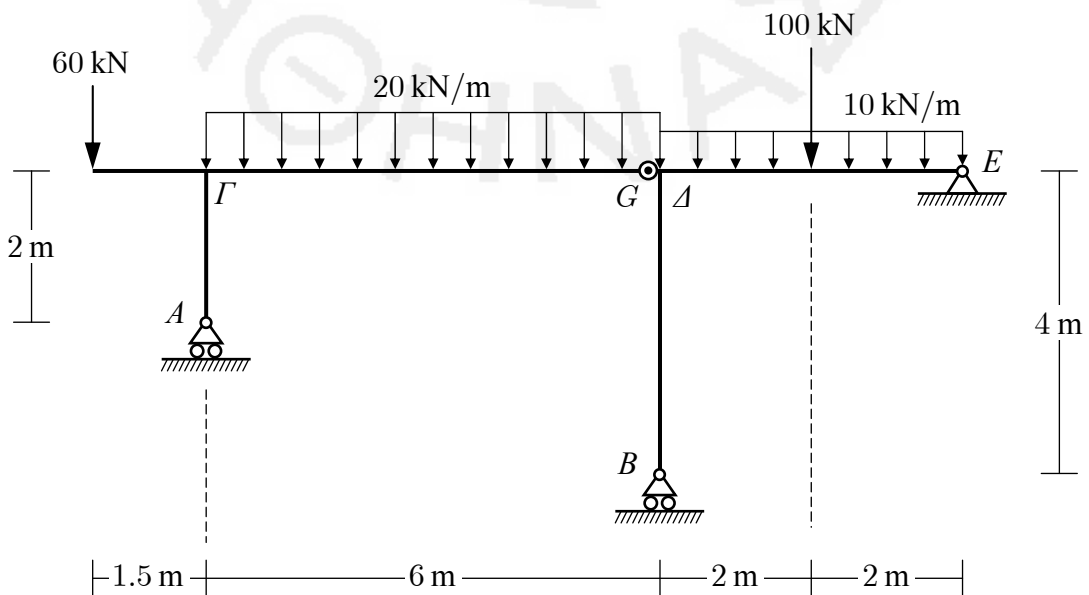
Άσκηση 33

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών [N], τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του πλαισίου.



Άσκηση 34

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών [N], τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του πλαισίου.



Μέρος 3^ο

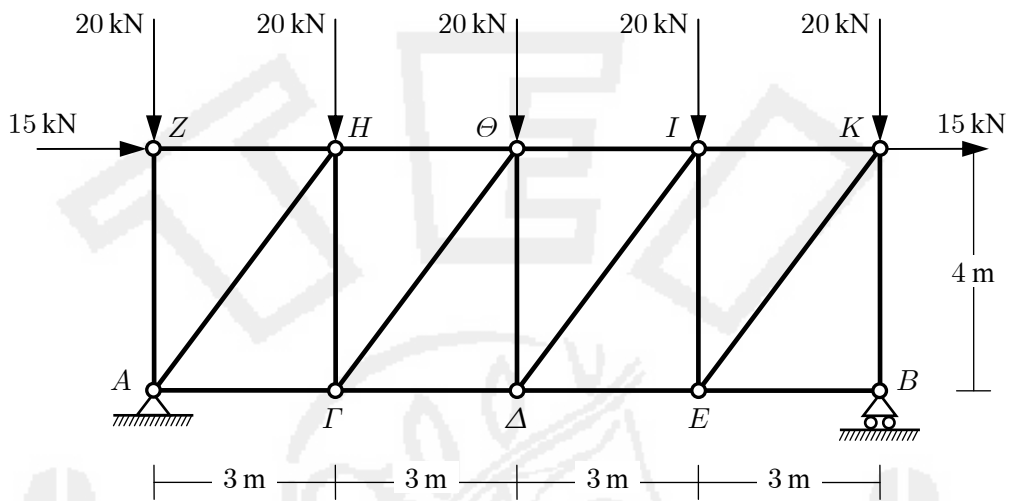
Ανάλυση Επίπεδων Δικτυωμάτων

Άσκηση 35

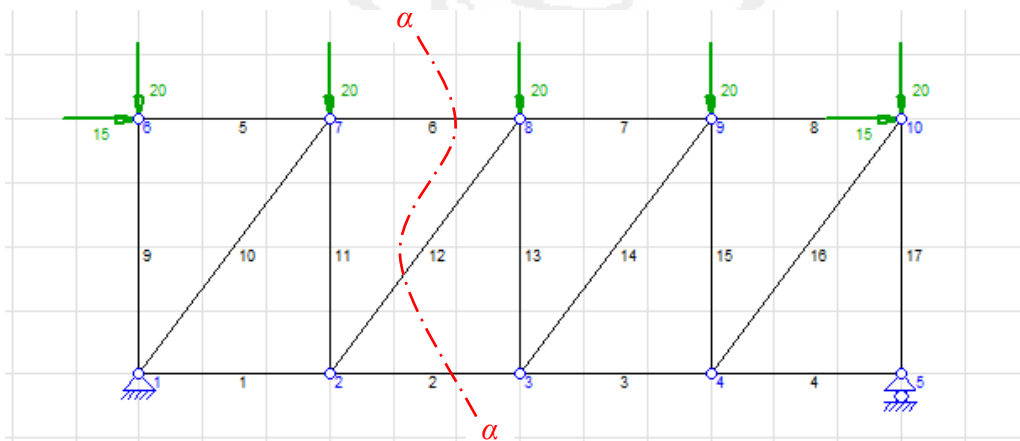
Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- (α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών και εξισώσεις ροπών να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη $H\Theta$, $\Gamma\Theta$ και $\Gamma\Delta$.
- (β) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις των ράβδων που συντρέχουν στους κόμβους B , K , E και I (δηλ. BE , BK , KI , KE , $I\Theta$, $I\Delta$, IE και IE).

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



Λύση:



Αντιδράσεις στηρίξεων: $A_x = -30.00 \text{ kN}$, $A_y = 40.00 \text{ kN}$, $B_y = 60.00 \text{ kN}$

(α) Μέθοδος των τομών: Τομή α-α (δεξί τμήμα)

Δύναμη στο μέλος ΗΘ:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{\Gamma} = 0 &\Rightarrow 4 \cdot N_{H\Theta} - 3 \cdot 20 - 6 \cdot 20 - 9 \cdot 20 - 4 \cdot 15 + 9 \cdot B_y = 0 \\ &\Rightarrow 4 \cdot N_{H\Theta} - 60 - 120 - 180 - 60 + 9 \cdot 60 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{H\Theta} = -30 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Δύναμη στο μέλος ΓΔ:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{\Theta} = 0 &\Rightarrow -4 \cdot N_{\Gamma\Delta} - 3 \cdot 20 - 6 \cdot 20 + 6 \cdot B_y = 0 \\ &\Rightarrow -4 \cdot N_{\Gamma\Delta} - 60 - 120 + 6 \cdot 60 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{\Gamma\Delta} = 45 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Δύναμη στο μέλος ΓΘ:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow -\frac{4}{5} \cdot N_{\Gamma\Theta} - 20 - 20 - 20 + B_y = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{4}{5} \cdot N_{\Gamma\Theta} - 60 + 60 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{\Gamma\Theta} = 0 \text{ kN}}\end{aligned}$$

(β) Μέθοδος των κόμβων:

Κόμβος Β: προσδιορισμός μελών N_{BE} και N_{BK}

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -N_{BE} = 0 \Rightarrow \boxed{N_{BE} = 0 \text{ kN}} \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_{BK} + B_y = 0 \Rightarrow N_{BK} + 60 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{BK} = -60 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Κόμβος Κ: προσδιορισμός μελών N_{KE} και N_{KI}

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow -N_{BK} - \frac{4}{5}N_{KE} - 20 = 0 \Rightarrow -(-60) - \frac{4}{5}N_{KE} - 20 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{N_{KE} = 50 \text{ kN}} \\ \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -N_{KI} - \frac{3}{5}N_{KE} + 15 = 0 \Rightarrow -N_{KI} - \frac{3}{5}50 + 15 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{N_{KI} = -15 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Κόμβος Ε: προσδιορισμός μελών N_{IE} και $N_{\Delta E}$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{IE} + \frac{4}{5}N_{KE} = 0 \Rightarrow N_{IE} + \frac{4}{5}50 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{IE} = -40 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N_{\Delta E} + \frac{3}{5}N_{KE} + N_{BE} = 0 \Rightarrow -N_{\Delta E} + \frac{3}{5}50 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{\Delta E} = 30 \text{ kN}}$$

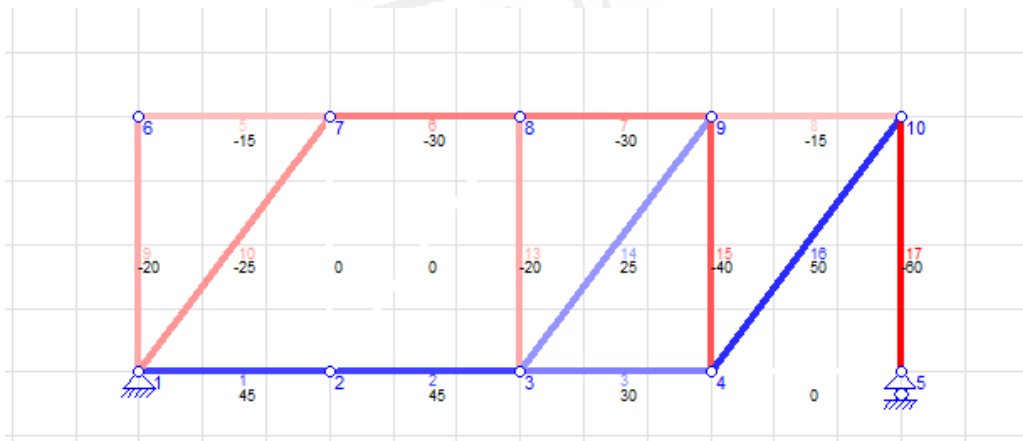
Κόμβος I: προσδιορισμός μελών $N_{I\theta}$ και $N_{I\Delta}$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_{IE} - \frac{4}{5}N_{I\Delta} - 20 = 0 \Rightarrow -(-40) - \frac{4}{5}N_{I\Delta} - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{I\Delta} = 25 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N_{I\theta} - \frac{3}{5}N_{I\Delta} + N_{KI} = 0 \Rightarrow -N_{I\theta} - \frac{3}{5}25 + (-15) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{I\theta} = -30 \text{ kN}}$$

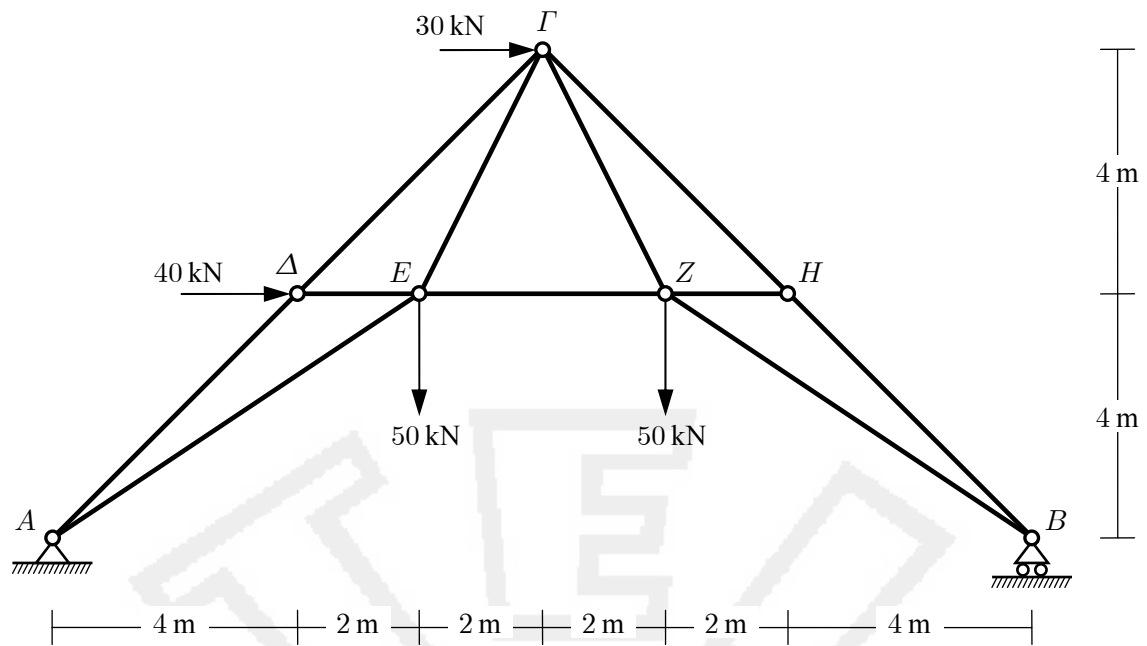


Άσκηση 36

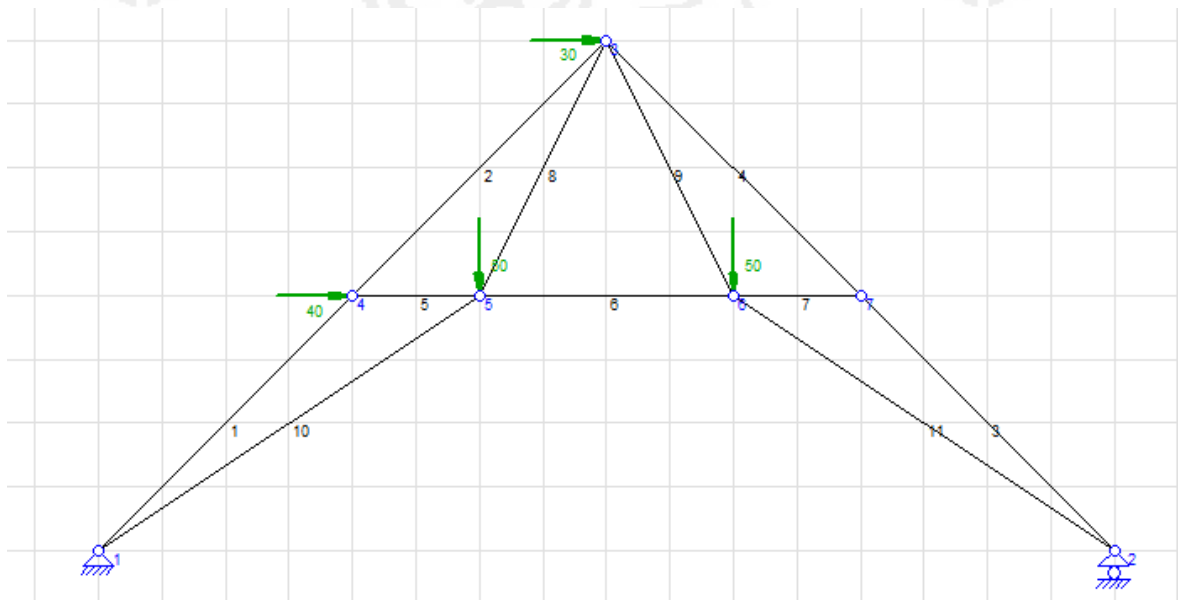
Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- (α) Να σημειωθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη.
- (β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών και εξισώσεις ροπών να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη $ΓΔ$, $ΓΕ$ και $ΖΕ$.
- (γ) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις των ράβδων που συντρέχουν στους κόμβους B και Z (δηλ. BZ , BH , ZH , $ZΓ$ και $ΖΕ$).

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.

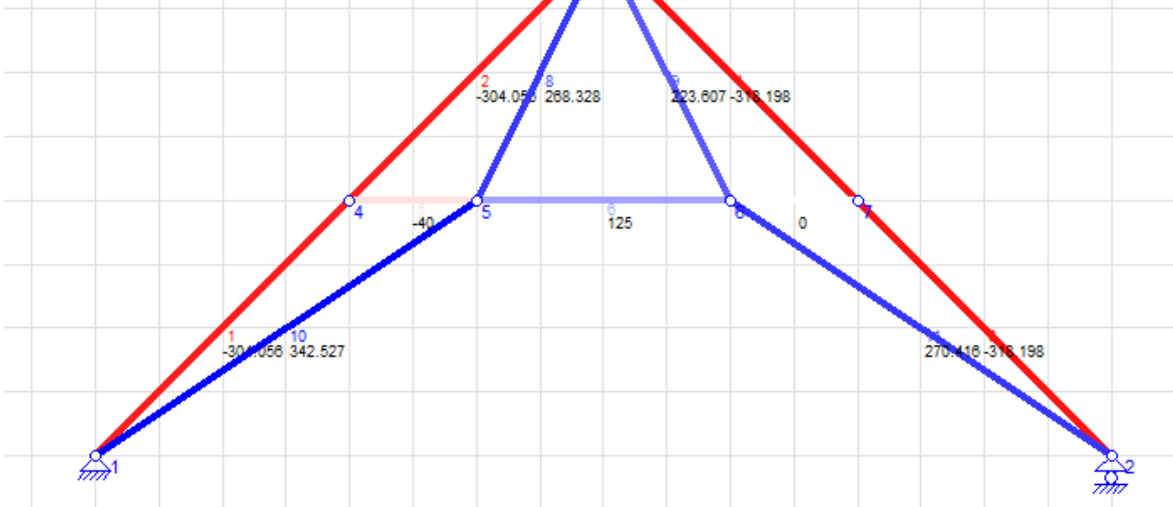


Λύση:



Axial Force

max. = 342.527
min. = -318.198



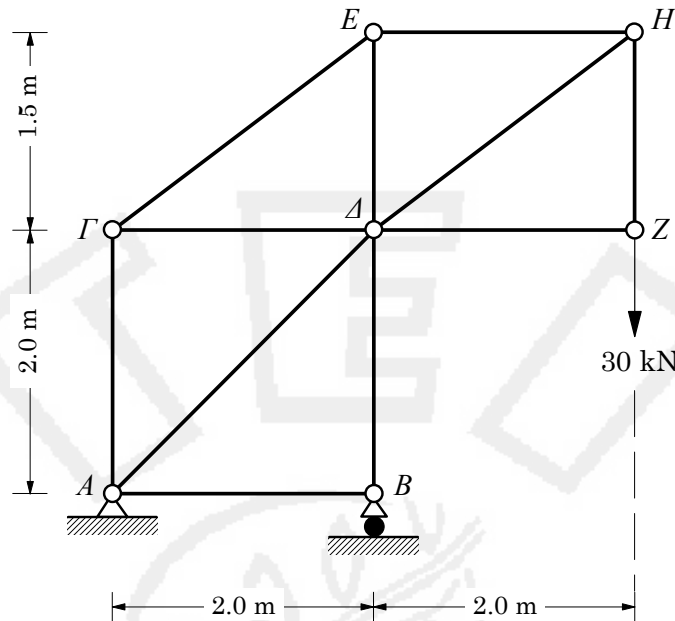
Αντιδράσεις στηρίξεων: $A_x = -70.00 \text{ kN}$, $A_y = 25.00 \text{ kN}$, $B_y = 75.00 \text{ kN}$

Δυνάμεις ράβδων:

ΡΑΒΔΟΣ		Αξονική δύναμη	
α/α	άκρα	τιμή	φορά
1	ΑΔ	-304.056	θλίψη
2	ΓΔ	-304.056	θλίψη
3	ΒΗ	-318.198	θλίψη
4	ΓΗ	-318.198	θλίψη
5	ΔΕ	-40.000	θλίψη
6	ΕΖ	125.000	εφελκυσμός
7	ΖΗ	0.000	
8	ΓΕ	268.328	εφελκυσμός
9	ΓΖ	223.607	εφελκυσμός
10	ΑΕ	342.527	εφελκυσμός
11	ΒΖ	270.416	εφελκυσμός

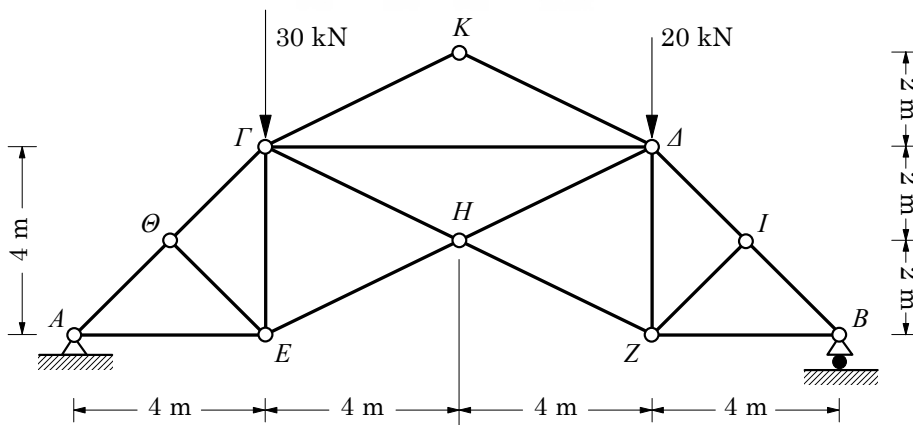
Άσκηση 37

- (α) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των τομών οι δυνάμεις στα μέλη AD και GE .
 (β) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων όλες οι υπόλοιπες δυνάμεις.
 Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



Άσκηση 38

- (α) Να σημειωθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη. Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.
 (β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών και εξισώσεις ροπών να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη $ΓΔ$, $ΔΗ$ και ZH .
 (γ) Να υπολογισθούν οι δυνάμεις στα μέλη BI , BZ , $ΔZ$ και ZH με τη μέθοδο των κόμβων.
 Για όλες τις δυνάμεις να διευκρινισθεί εάν είναι θλιπτικές ή εφελκυστικές.

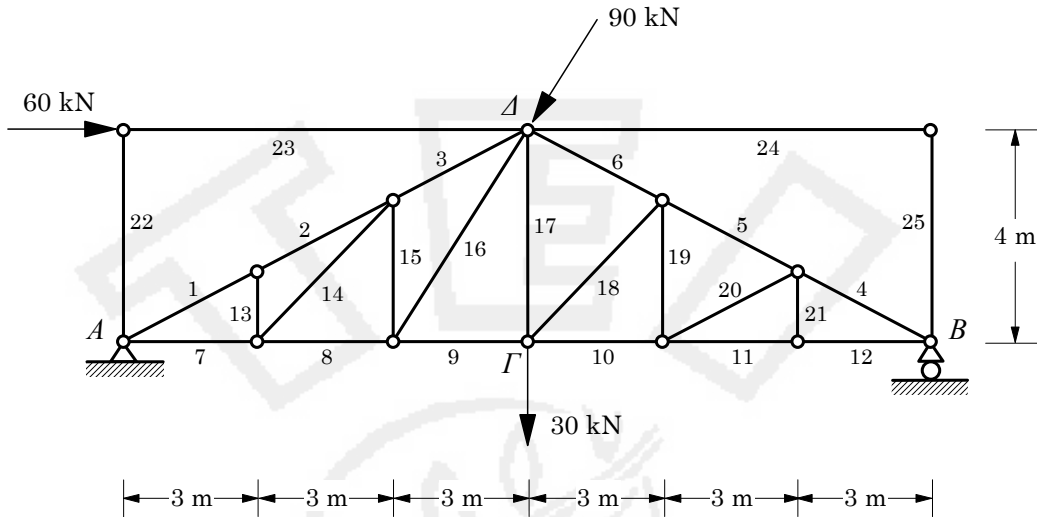


Άσκηση 39

Τα φορτία των 60 kN, 90 kN και 30 kN ασκούνται στις διευθύνσεις των μελών #23, #16 και #17, αντίστοιχα. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις σε όλα τα μέλη του δικτυώματος ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- (α) με τη μέθοδο των τομών να βρεθούν οι δυνάμεις στα μέλη N_6 και N_{10} , και
- (β) με τη μέθοδο των κόμβων να βρεθούν οι δυνάμεις στα υπόλοιπα μέλη.

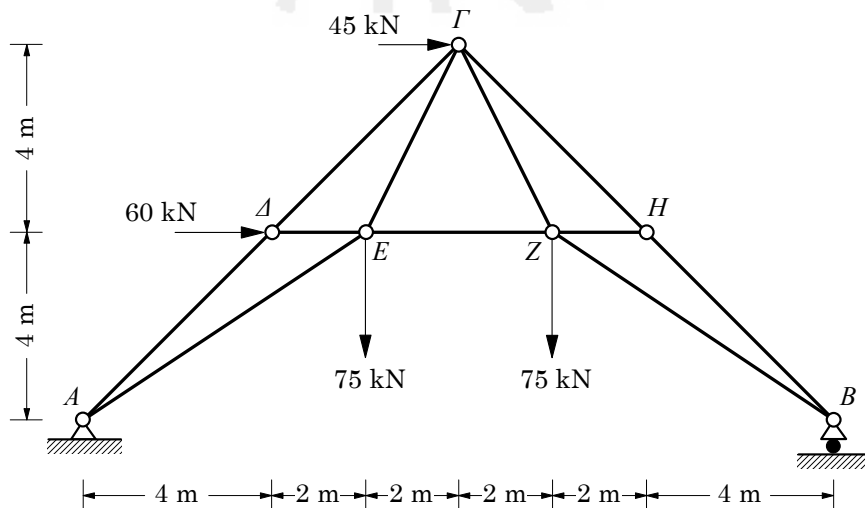
Για όλες τις απαντήσεις να διευκρινισθεί εάν το μέλος υπόκειται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



Άσκηση 40

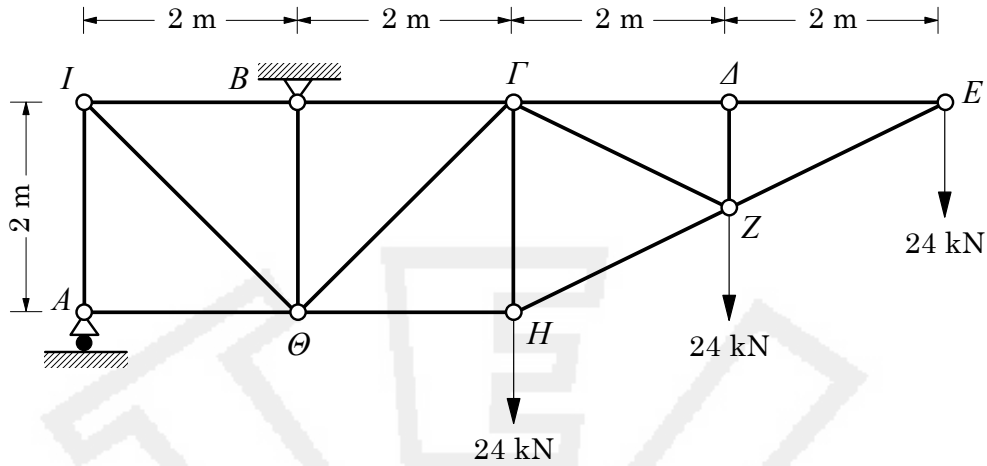
- (α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών και εξισώσεις ροπών να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη $ΓΔ$, $ΓΕ$ και $ΖΕ$.
- (β) Να υπολογισθούν όλες οι δυνάμεις που συντρέχουν στους κόμβους B και Z (δηλ. BZ , BH , ZH , $ZΓ$ και $ΖΕ$).

Για όλες τις απαντήσεις να διευκρινισθεί εάν το μέλος υπόκειται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



Άσκηση 41

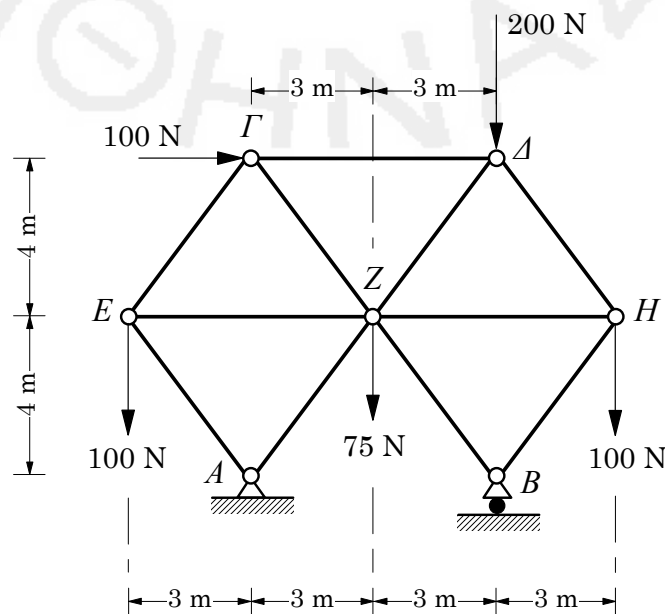
Να υπολογισθούν οι δυνάμεις ΘH , $\Theta \Gamma$, $\Gamma \Delta$ και ΓZ με τη μέθοδο των τομών Ritter, και να προσδιορισθεί εάν τα μέλη βρίσκονται σε θλίψη ή εφελκυσμό. Επιπλέον, να εντοπισθούν δύο μέλη με μηδενική ένταση.



Άσκηση 42

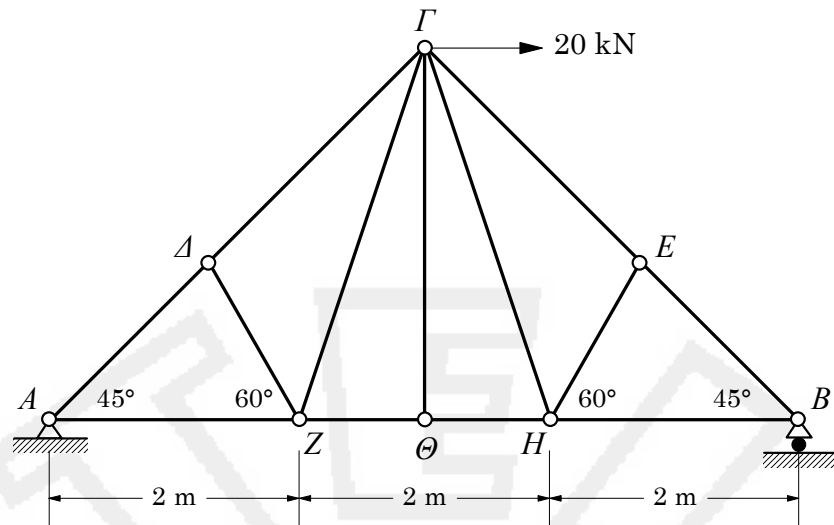
- (α) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη $\Gamma \Delta$, ΓE και ΓZ με τη μέθοδο των τομών και εξισώσεις ισορροπίας ροπών. (Υπόδειξη: να βρεθεί πρώτα η $\Gamma \Delta$ προκειμένου να υπολογισθεί η ΓZ).
- (β) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη που καταλήγουν στο κόμβο Z (δηλ. $Z \Delta$, ZH , ZB , ZA και ZE) χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις δύο μεθόδους.
- (γ) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΔH , BH και AE χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων.

Για όλες τις δυνάμεις να διευκρινισθεί εάν είναι θλιπτικές ή εφελκυστικές.



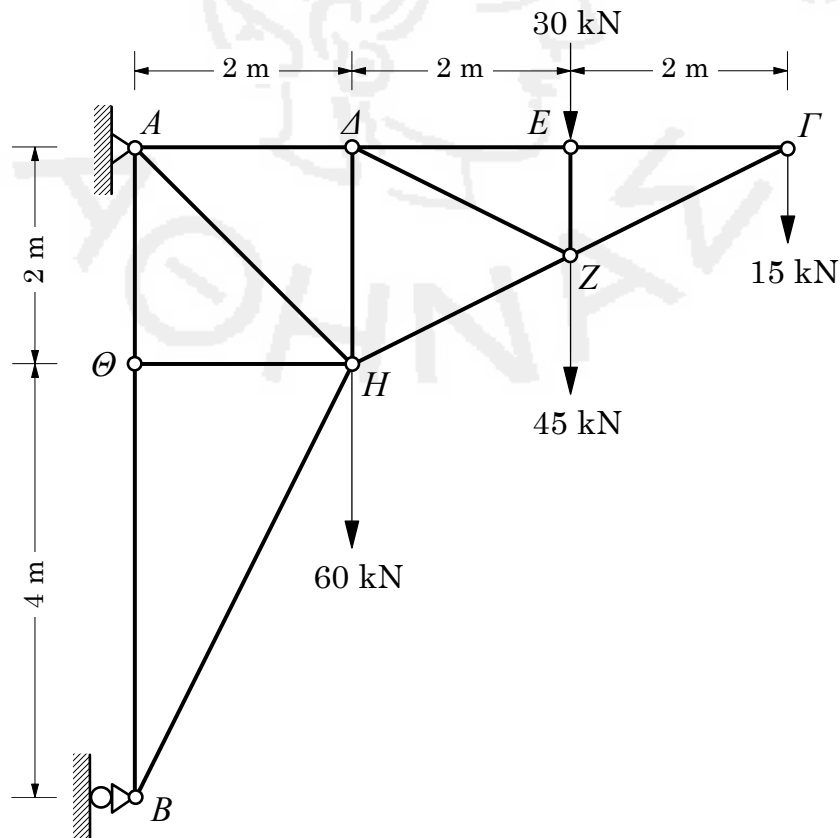
Άσκηση 43

Να υπολογισθούν οι δυνάμεις όλων των μελών του δικτύωματος. Να βρεθεί εάν τα μέλη υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



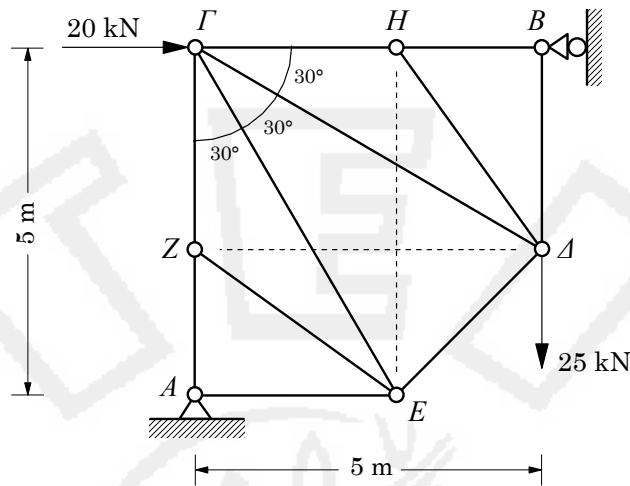
Άσκηση 44

Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΑΔ, ΑΗ, ΘΗ και ΒΗ με τη μέθοδο των τομών.



Άσκηση 45

- (α) Να σημειωθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη. Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.
 - (β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών να προσδιορισθεί η δύναμη στο μέλος ΔΕ. (Υπόδειξη: δεν υπάρχει λόγος να βρεθούν οι αντιδράσεις).
 - (γ) Να υπολογισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΑΕ και ΓΕ με τη μέθοδο των κόμβων.
- Να προσδιορισθεί για κάθε μέλος εάν υπόκειται σε θλίψη ή εφελκυσμό.

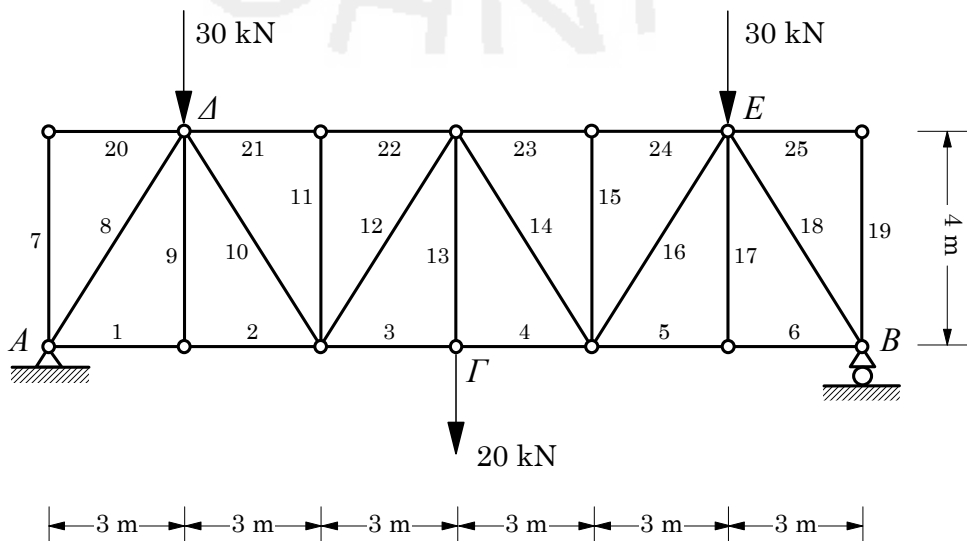


Άσκηση 46

Να προσδιορισθούν:

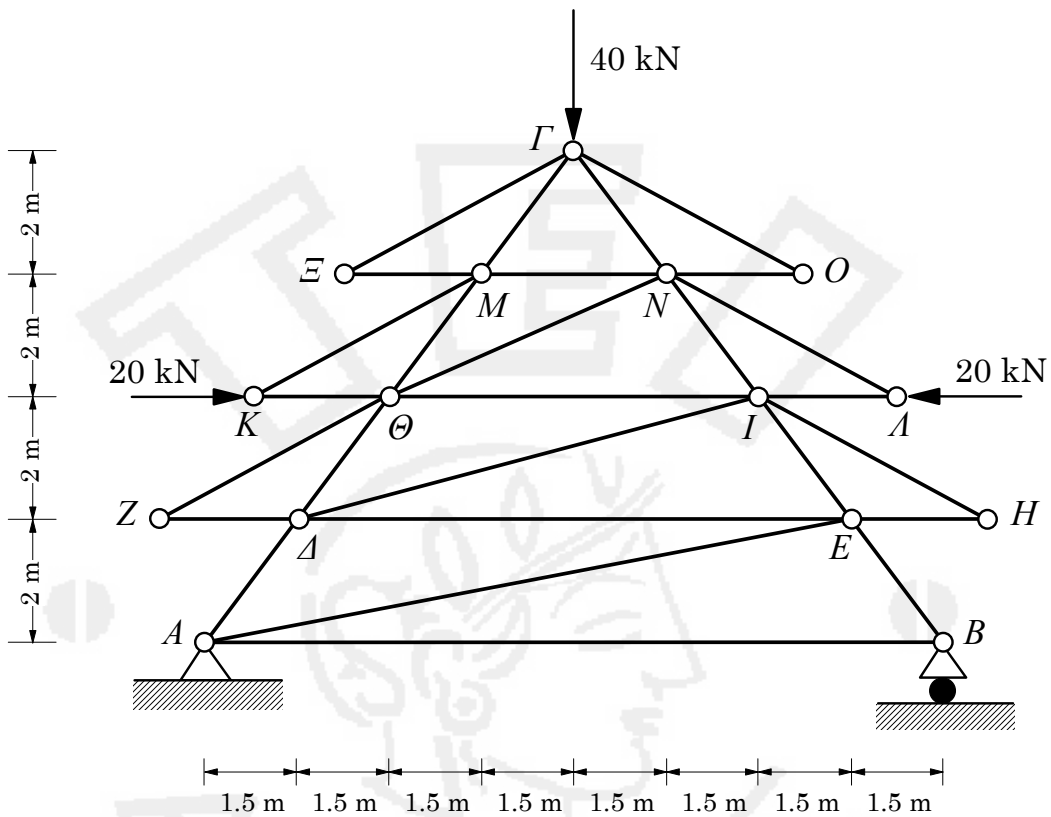
- (α) με τη μέθοδο των τομών οι δυνάμεις των μελών N_{14} και N_{21} ,
- (β) με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις στα μέλη N_9 , N_{19} , N_{12} και N_{13} , και
- (γ) τα μέλη με μηδενική αξονική δύναμη.

Να διευκρινισθεί για κάθε μέλος εάν υπόκειται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



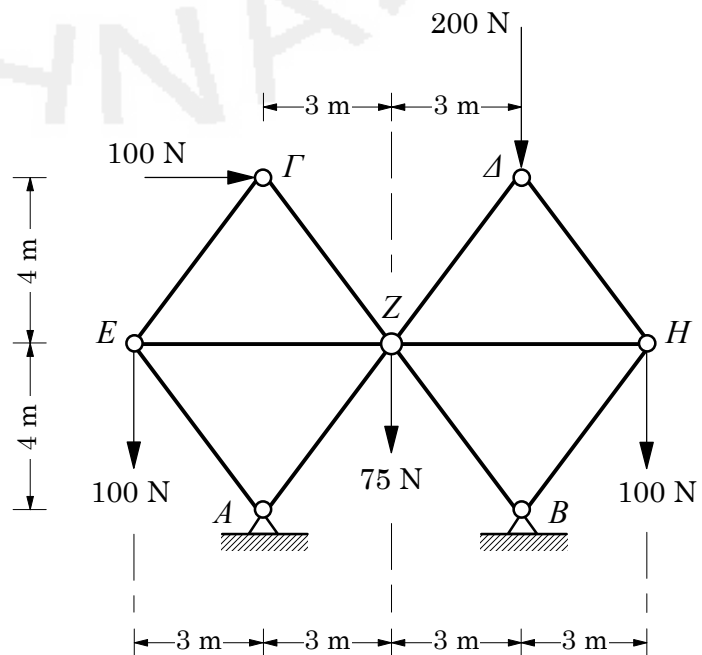
Άσκηση 47

- (α) Να υπολογισθούν οι δυνάμεις στα μέλη AE και AD χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών και εξισώσεις ισορροπίας ροπών.
 - (β) Να προσδιορισθούν όλα τα μέλη με μηδενική δύναμη.
 - (γ) Να υπολογισθούν όλες οι υπόλοιπες δυνάμεις με τη μέθοδο των κόμβων.
- Για κάθε δύναμη να διευκρινισθεί εάν είναι θλιπτική ή εφελκυστική.



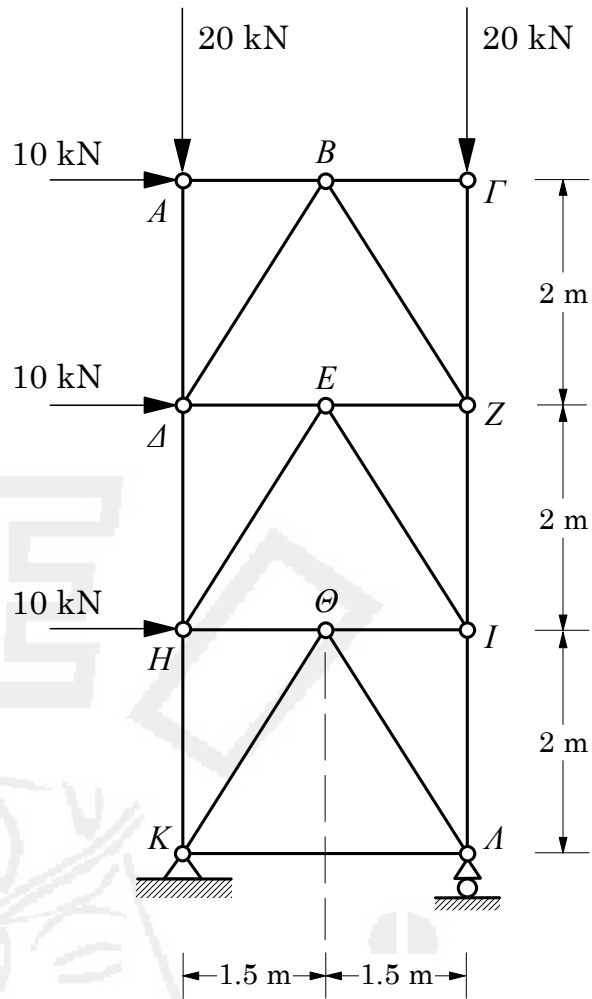
Άσκηση 48

Να υπολογισθούν οι δυνάμεις όλων των μελών του δικτυώματος. Να δηλωθεί εάν τα μέλη υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



Άσκηση 49

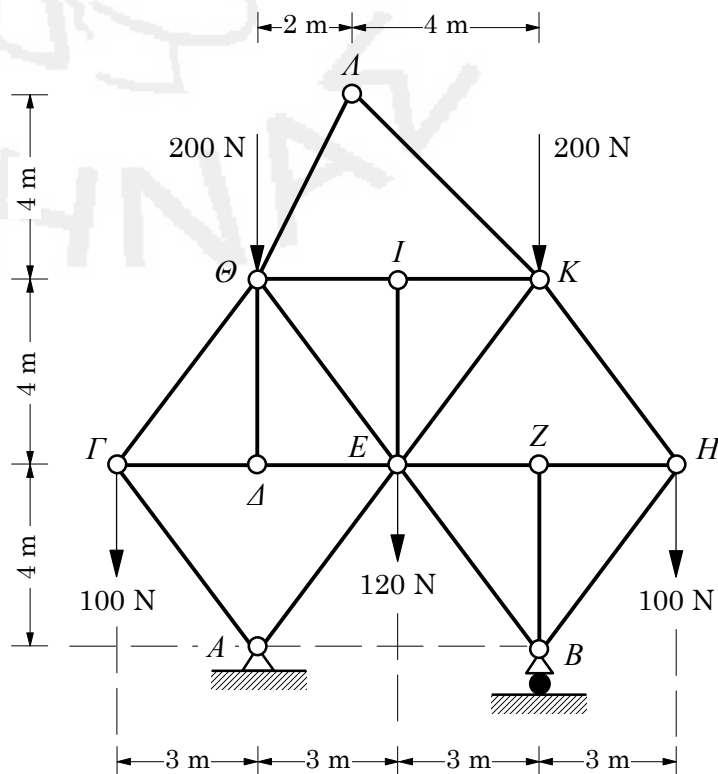
Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη HA , HE , $H\Theta$ και ΘK χρησιμοποιώντας μόνο τη μέθοδο των τομών *Ritter*. Συγκεκριμένα, να γίνουν δύο διαφορετικές τομές για τον υπολογισμό των δυνάμεων HA και HE , και μία τομή για τα μέλη $H\Theta$ και ΘK . Σε όλες τις περιπτώσεις να αξιοποιηθεί η εξίσωση ισοροπίας των ροπών και να βρεθούν οι παραπάνω δυνάμεις με την ίδια σειρά που εμφανίζονται στην εκφώνηση της άσκησης. Να δηλωθεί ποιές από αυτές είναι εφελκυστικές και ποιές θλιπτικές.



Άσκηση 50

- (α) Να προσδιορισθούν όλα τα μέλη με μηδενική δύναμη.
- (β) Να υπολογισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΘI και $\Gamma\Theta$ με τη μέθοδο των τομών.
- (γ) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις σε όλα τα άλλα μέλη του δικτυώματος χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις δύο μεθόδους, κόμβων ή τομών.

Για κάθε δύναμη να διευκρινισθεί εάν είναι θλιπτική ή εφελκυστική.

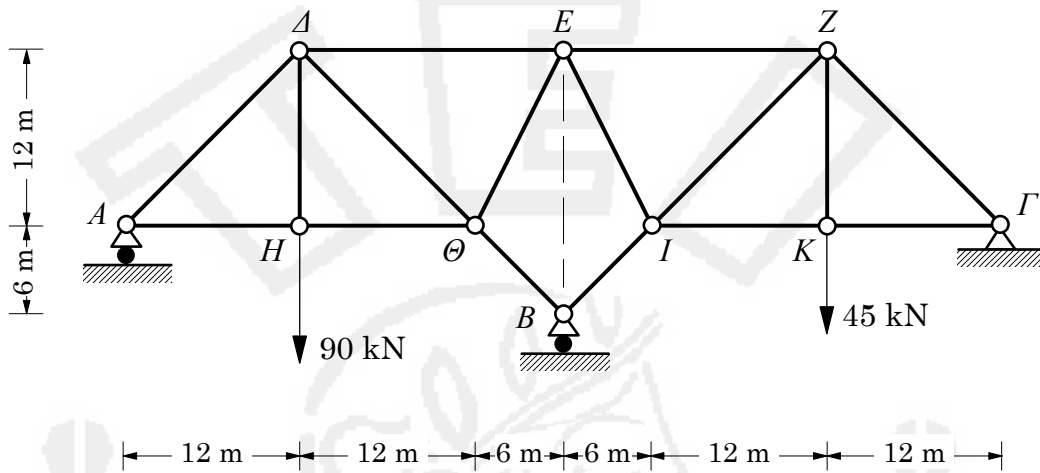


Άσκηση 51

Το δικτύωμα του παρακάτω σχήματος ονομάζεται *Wichert-truss* (πήρε το όνομά του από τον Wichert E. M., 1932).

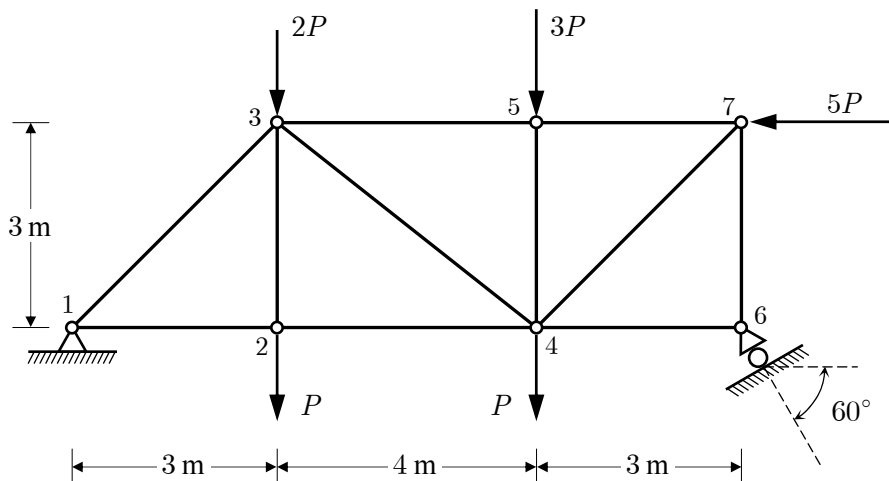
- (α) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις και οι δυνάμεις στα μέλη $B\theta$ και BI .
- (β) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΔE , $H\theta$ και θE με τη μέθοδο των τομών και εξισώσεις ισοροπίας των ροπών.
- (γ) Να υπολογισθούν οι δυνάμεις σε όλα τα μέλη που καταλήγουν στο κόμβο Z (δηλ., ZE , ZI , ZK και ZI') χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων.

Για κάθε δύναμη να διευκρινισθεί εάν είναι θλιπτική ή εφελκυστική.



Άσκηση 52

Το δικτύωμα του σχήματος στηρίζεται με άρθρωση στον κόμβο #1 και με λοξή κύλιση στον κόμβο #6. Εάν η δύναμη $P = 100 \text{ kN}$, να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη 2-4, 3-4 και 3-5 με τη μέθοδο των τομών, οι δυνάμεις στα μέλη του κόμβου #7 με τη μέθοδο των κόμβων και η αντίδραση στη κύλιση.



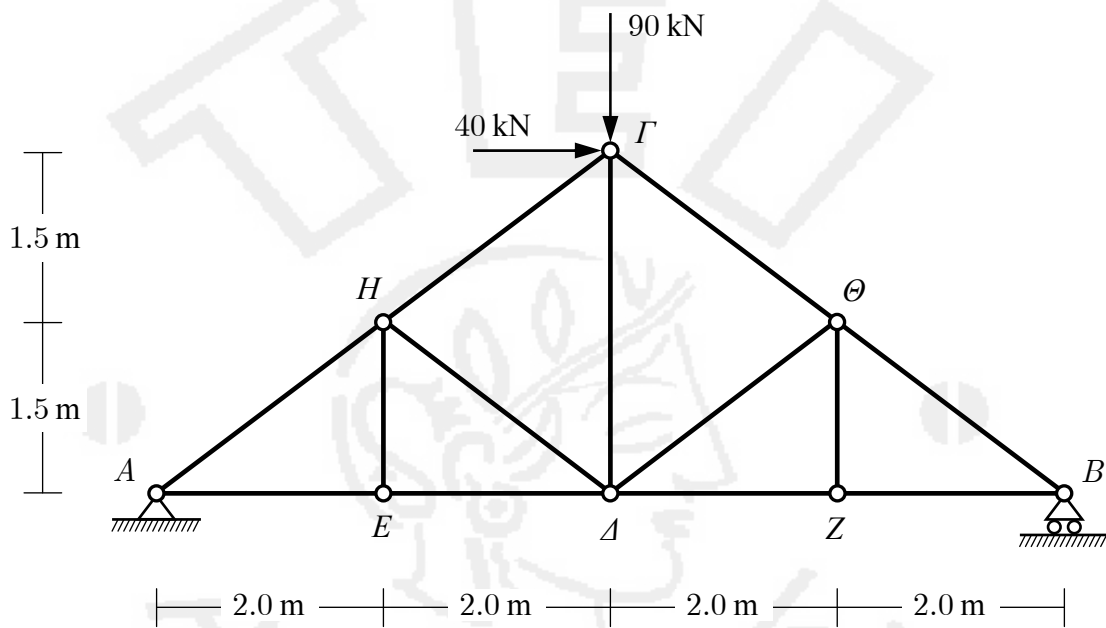
Άσκηση 53

Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- (α) Να σημειωθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- (β) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΓΘ, ΔΖ και ΗΔ του δικτύωματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών.
- (γ) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις στα μέλη ΑΕ, ΑΗ, ΒΘ και ΒΖ του δικτύωματος.

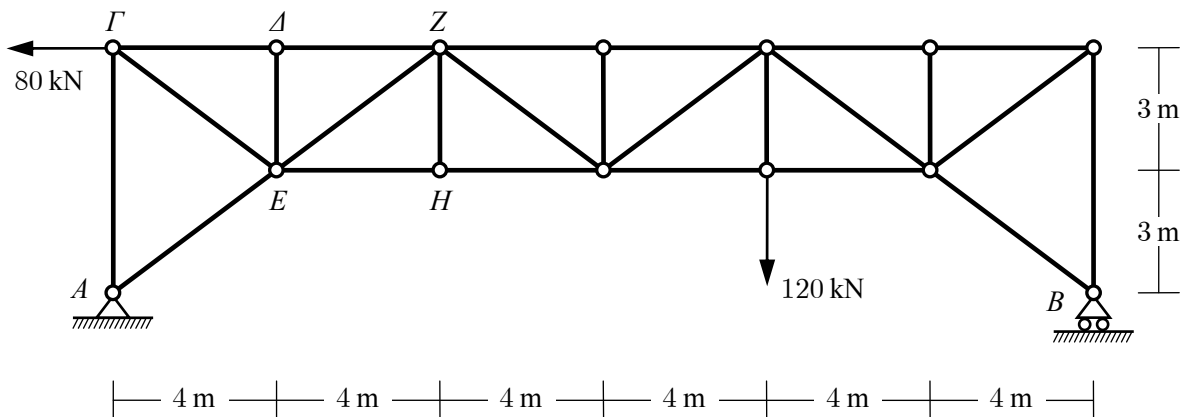
Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.

(Παραλλαγή: Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις σε όλα τα μέλη του δικτύωματος.)



Άσκηση 54

Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΓΑ, ΓΕ, ΔΖ και ΕΖ του δικτύωματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών. Επιπλέον να σημειωθούν όλα τα μέλη με μηδενική δύναμη. (Απαντήσεις: $A_x = 80 \text{ kN}$, $A_y = 60 \text{ kN}$, $B_y = 60 \text{ kN}$).



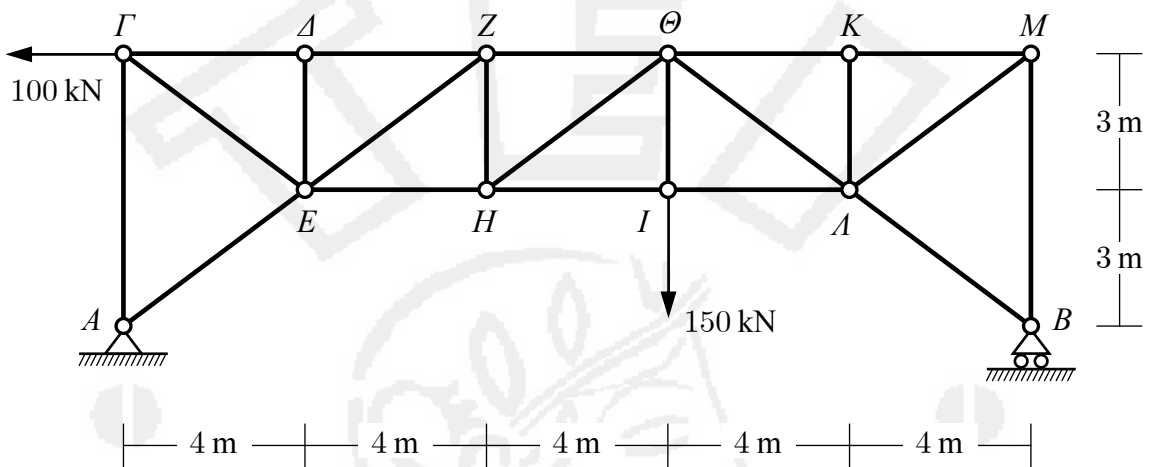
Άσκηση 55

Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- (α) Να σημειωθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- (β) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη $GE, \Delta Z, H\Theta, KM$ και AI του δικτύωματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών.
- (γ) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις στα μέλη $AG, AE, GE, \Gamma\Delta$ και ΔE του δικτύωματος.

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.

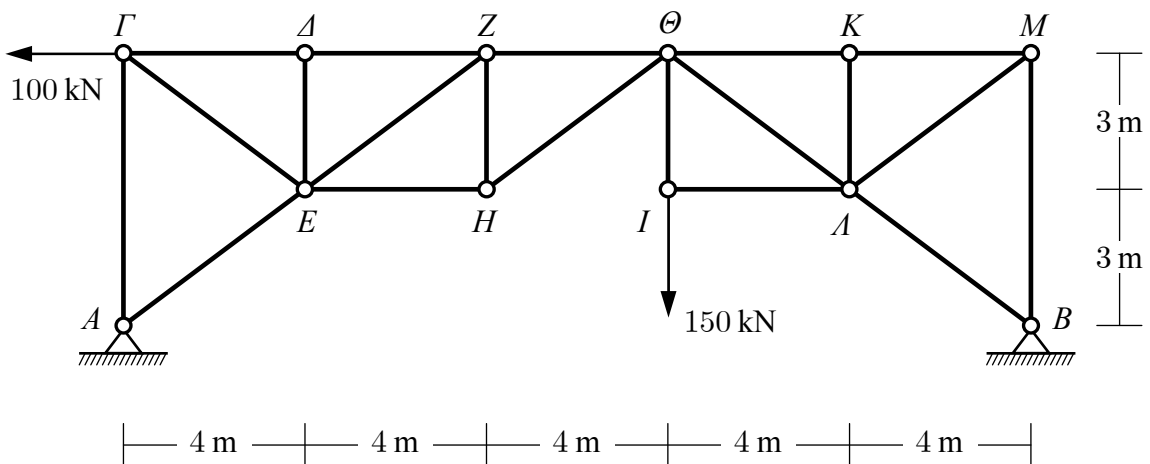
(Απαντήσεις: $A_x = 100 \text{ kN}, A_y = 90 \text{ kN}, B_y = 60 \text{ kN} .$)



Άσκηση 56

Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη $\Delta Z, EZ, EH, \Theta K$ και AM του δικτύωματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών. Να σημειωθούν όλα τα μέλη με μηδενική δύναμη. Τέλος, να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις σε όλα τα μέλη του τμήματος $\Theta KMB\Lambda I\Theta$ του δικτύωματος.

(Απαντήσεις: $A_x = 180 \text{ kN}, A_y = 90 \text{ kN}, B_x = -80 \text{ kN}, B_y = 60 \text{ kN} .$)



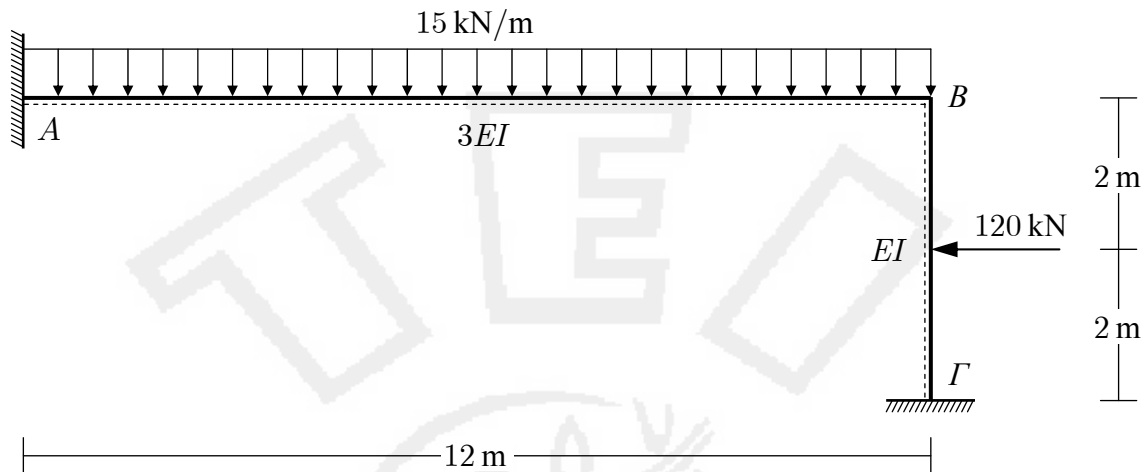
Μέρος 4^ο

Υπερστατικοί Φορείς

Άσκηση 57

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία *A*, *B* και *Γ*.
- (β) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα καμπτικών ροπών του φορέα και να προσδιορισθεί η μέγιστη τιμή και η θέση της καμπτικής ροπής.



	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{PL}{8}, \quad M_B = -\frac{PL}{8}$ $Q_A = \frac{P}{2}, \quad Q_B = -\frac{P}{2}$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12},$ $Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$

Λύση:

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο *B*.

Δοκός AB:

$$M_{AB} = \frac{2(3EI)}{12}\phi + \frac{15 \cdot 12^2}{12} \Rightarrow M_{AB} = 0.5EI\phi + 180$$

$$M_{BA} = \frac{4(3EI)}{12}\phi - \frac{15 \cdot 12^2}{12} \Rightarrow M_{BA} = EI\phi - 180$$

$$Q_{AB} = \frac{6(3EI)}{12^2}\phi + \frac{15 \cdot 12}{2} \Rightarrow Q_{AB} = \frac{1}{8}EI\phi + 90$$

$$Q_{BA} = \frac{6(3EI)}{12^2}\phi - \frac{15 \cdot 12}{2} \Rightarrow Q_{BA} = \frac{1}{8}EI\phi - 90$$

Δοκός BΓ:

$$M_{B\Gamma} = \frac{4EI}{4}\phi + \frac{120 \cdot 4}{8} \Rightarrow M_{B\Gamma} = EI\phi + 60$$

$$M_{\Gamma B} = \frac{2EI}{4}\phi - \frac{120 \cdot 4}{8} \Rightarrow M_{\Gamma B} = 0.5EI\phi - 60$$

$$Q_{B\Gamma} = \frac{6EI}{4^2}\phi + \frac{120}{2} \Rightarrow Q_{B\Gamma} = \frac{3}{8}EI\phi + 60$$

$$Q_{\Gamma B} = \frac{6EI}{4^2}\phi - \frac{120}{2} \Rightarrow Q_{\Gamma B} = \frac{3}{8}EI\phi - 60$$

Ισοροπία κόμβου B:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow M_{BA} + M_{B\Gamma} = 0 \Rightarrow (EI\phi - 180) + (EI\phi + 60) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{EI\phi = 60} \end{aligned}$$

Κόμβος A:

$$A_y = Q_{AB} \Rightarrow A_y = \frac{1}{8}EI\phi + 90 \Rightarrow \boxed{A_y = 97.5 \text{ kN}}$$

$$M_A = M_{AB} \Rightarrow M_A = 0.5EI\phi + 180 \Rightarrow \boxed{M_A = 210 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

Κόμβος Γ:

$$\Gamma_x = -Q_{\Gamma B} \Rightarrow \Gamma_x = -\left(\frac{3}{8}EI\phi - 60\right) \Rightarrow \boxed{\Gamma_x = 37.5 \text{ kN}}$$

$$M_\Gamma = M_{\Gamma B} \Rightarrow M_\Gamma = \frac{2EI}{4}\phi - \frac{120 \cdot 4}{8} \Rightarrow \boxed{M_\Gamma = -30 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

Ισοροπία πλαισίου:

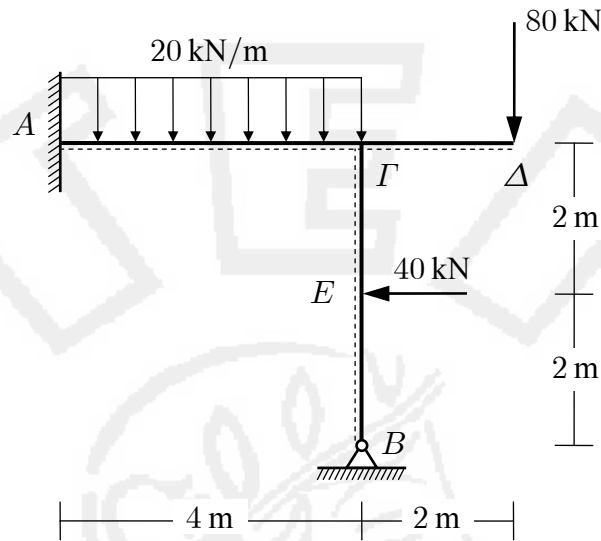
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + \Gamma_x - 120 = 0 \Rightarrow A_x + 37.5 = 120 \Rightarrow \boxed{A_x = 82.5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + \Gamma_y - 15 \cdot 12 = 0 \Rightarrow 97.5 + \Gamma_y = 180 \Rightarrow \boxed{\Gamma_y = 82.5 \text{ kN}}$$

Άσκηση 58

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία A (ροπή πακτώσεως) και Γ (αριστερά, δεξιά και κάτω).
- (β) Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών και ροπών του φορέα.
- (γ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



Λύση:

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο Γ .

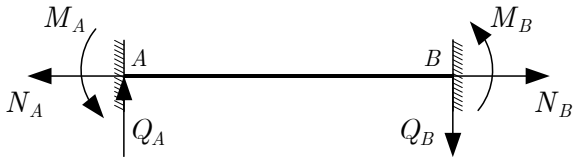
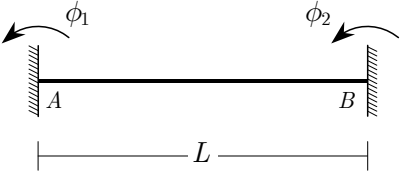
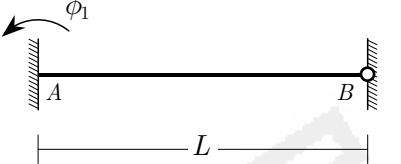
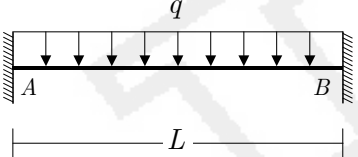
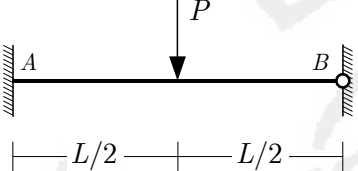
Δοκός $A\Gamma$:

$$M_{A\Gamma} = \frac{2EI}{4} \phi + \frac{20 \cdot 4^2}{12} \Rightarrow M_{A\Gamma} = \frac{EI\phi}{2} + \frac{80}{3}$$

$$M_{\Gamma A} = \frac{4EI}{4} \phi - \frac{20 \cdot 4^2}{12} \Rightarrow M_{\Gamma A} = EI\phi - \frac{80}{3}$$

$$Q_{A\Gamma} = \frac{6EI}{4^2} \phi + \frac{20 \cdot 4}{2} \Rightarrow Q_{A\Gamma} = \frac{3EI\phi}{8} + 40$$

$$Q_{\Gamma A} = \frac{6EI}{4^2} \phi - \frac{20 \cdot 4}{2} \Rightarrow Q_{\Gamma A} = \frac{3EI\phi}{8} - 40$$

<p>ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΟΝΟΠΑΚΤΩΝ ΚΑΙ ΑΜΦΙΠΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ</p>	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{3EI}{L}\phi_1$ $Q_A = \frac{3EI}{L^2}\phi_1, \quad Q_B = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$
	$M_A = \frac{3PL}{16}$ $Q_A = \frac{11P}{16}, \quad Q_B = -\frac{5P}{16}$

Δοκός ΓΒ:

$$M_{\Gamma B} = \frac{3EI}{4}\phi + \frac{3 \cdot 40 \cdot 4}{16} \Rightarrow M_{\Gamma B} = \frac{3EI\phi}{4} + 30$$

$$Q_{\Gamma B} = \frac{3EI}{4^2}\phi + \frac{11 \cdot 40}{16} \Rightarrow Q_{\Gamma B} = \frac{3EI\phi}{16} + \frac{55}{2}$$

$$Q_{B\Gamma} = \frac{3EI}{4^2}\phi - \frac{5 \cdot 40}{16} \Rightarrow Q_{B\Gamma} = \frac{3EI\phi}{16} - \frac{25}{2}$$

Πρόβολος ΓΔ: (ισοστατικό τμήμα)

$$M_{\Gamma\Delta} = 80 \cdot 2 \Rightarrow M_{\Gamma\Delta} = 160$$

$$Q_{\Gamma\Delta} = 80$$

Ισοροπία ροπών κόμβου Γ:

$$\Sigma M_{\Gamma} = 0 \Rightarrow M_{\Gamma A} + M_{\Gamma B} + M_{\Gamma\Delta} = 0$$

$$\Rightarrow \left(EI\phi - \frac{80}{3} \right) + \left(\frac{3EI\phi}{4} + 30 \right) + 160 = 0 \Rightarrow \boxed{EI\phi = -\frac{280}{3}}$$

Κόμβος Α:

$$A_y = Q_{AG} = \frac{3EI\phi}{8} + 40 \Rightarrow A_y = \frac{3}{8} \left(-\frac{280}{3} \right) + 40 \Rightarrow \boxed{A_y = 5 \text{ kN}}$$

$$M_A = M_{AG} = \frac{EI\phi}{2} + \frac{80}{3} \Rightarrow M_A = \frac{1}{2} \left(-\frac{280}{3} \right) + \frac{80}{3} \Rightarrow \boxed{M_A = -20 \text{ kNm}}$$

(αριστερόστροφα)

Κόμβος Β:

$$B_x = -Q_{BG} = - \left(\frac{3EI\phi}{16} - \frac{25}{2} \right) \Rightarrow B_x = -\frac{3}{16} \left(-\frac{280}{3} \right) + \frac{25}{2} \Rightarrow \boxed{B_x = 30 \text{ kN}}$$

Κόμβος Γ:

$$M_{GA} = EI\phi - \frac{80}{3} = \left(-\frac{280}{3} \right) - \frac{80}{3} = -\frac{360}{3} \Rightarrow \boxed{M_{GA} = -120 \text{ kNm}}$$

$$Q_{GA} = \frac{3EI\phi}{8} - 40 = \frac{3}{8} \left(-\frac{280}{3} \right) - 40 = -35 - 40 \Rightarrow \boxed{Q_{GA} = -75 \text{ kN}}$$

$$M_{GB} = \frac{3EI\phi}{4} + 30 = \frac{3}{4} \left(-\frac{280}{3} \right) + 30 = -70 + 30 \Rightarrow \boxed{M_{GB} = -40 \text{ kNm}}$$

$$Q_{GB} = \frac{3EI\phi}{16} + \frac{55}{2} = \frac{3}{16} \left(-\frac{280}{3} \right) + \frac{55}{2} = -\frac{35}{2} + \frac{55}{2} \Rightarrow \boxed{Q_{GB} = 10 \text{ kN}}$$

$$\boxed{M_{GD} = 160 \text{ kNm}}$$

$$\boxed{Q_{GD} = 80 \text{ kN}}$$

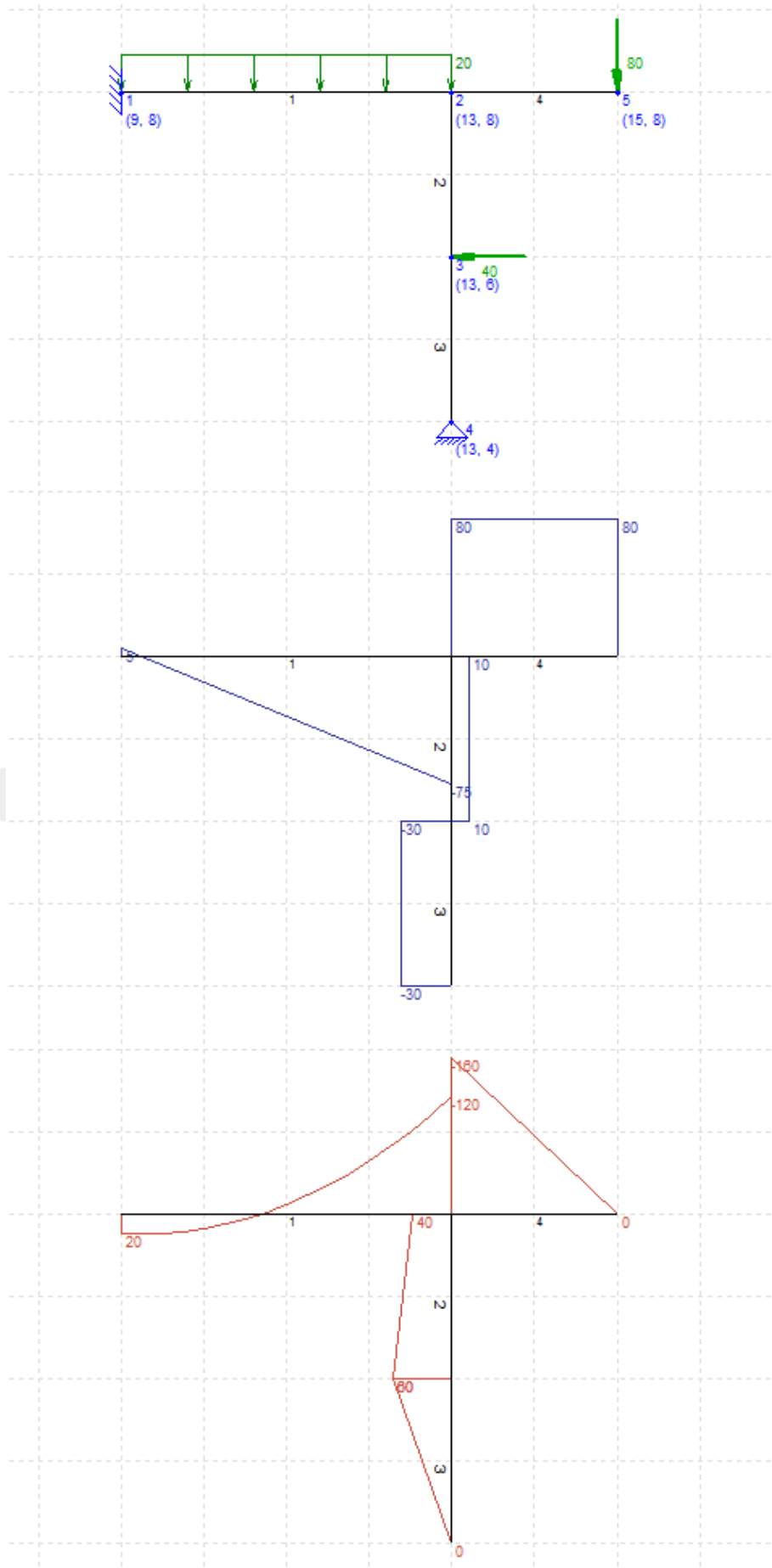
Ισοροπία πλαισίου:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x - 40 = 0 \Rightarrow A_x + 30 - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 10 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 4 \cdot 20 - 80 = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 155 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - (4 \cdot 20) \cdot 2 - 40 \cdot 2 + B_y \cdot 4 + B_x \cdot 4 - 80 \cdot 6 = 0$$

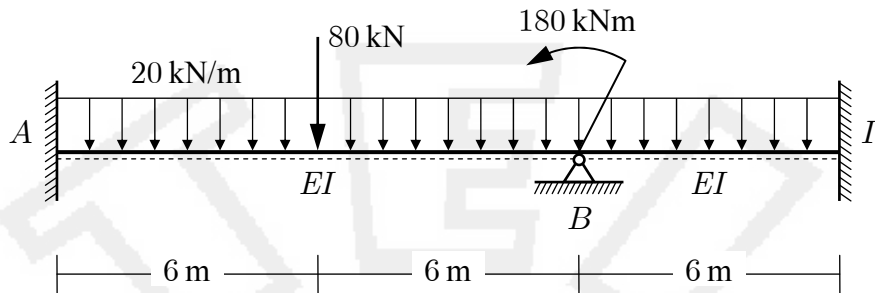
$$\Rightarrow -20 - 160 - 80 + 620 + 120 - 480 = 0 \Rightarrow -740 + 740 = 0 \quad \checkmark$$

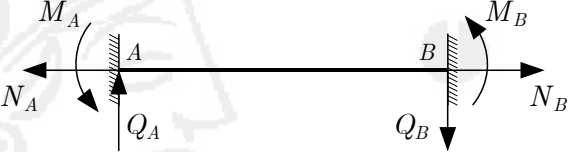
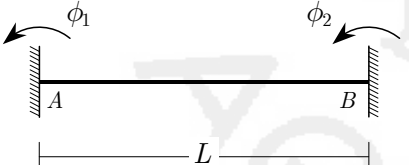
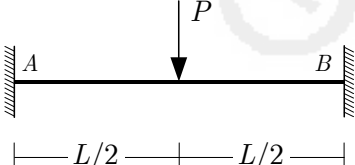
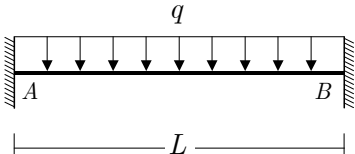


Άσκηση 59

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων ή τη μέθοδο Cross.

- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία *A*, *B* και *Γ*.
- (β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις *A*, *B* και *Γ* του φορέα.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- (δ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



<p>ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΑΜΦΙΠΛΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ</p>	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{PL}{8}, \quad M_B = -\frac{PL}{8}$ $Q_A = \frac{P}{2}, \quad Q_B = -\frac{P}{2}$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$

Λύση:

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο B.

Δοκός AB:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{12}\phi + \frac{20 \cdot 12^2}{12} + \frac{80 \cdot 12}{8} \Rightarrow M_{AB} = \frac{EI\phi}{6} + 360$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{12}\phi - \frac{20 \cdot 12^2}{12} - \frac{80 \cdot 12}{8} \Rightarrow M_{BA} = \frac{EI\phi}{3} - 360$$

$$Q_{AB} = \frac{6EI}{12^2}\phi + \frac{20 \cdot 12}{2} + \frac{80}{2} \Rightarrow Q_{AB} = \frac{EI\phi}{24} + 160$$

$$Q_{BA} = \frac{6EI}{12^2}\phi - \frac{20 \cdot 12}{2} - \frac{80}{2} \Rightarrow Q_{BA} = \frac{EI\phi}{24} - 160$$

Δοκός ΒΓ:

$$M_{BG} = \frac{4EI}{6}\phi + \frac{20 \cdot 6^2}{12} \Rightarrow M_{BG} = \frac{2EI\phi}{3} + 60$$

$$M_{GB} = \frac{2EI}{6}\phi - \frac{20 \cdot 6^2}{12} \Rightarrow M_{GB} = \frac{EI\phi}{3} - 60$$

$$Q_{BG} = \frac{6EI}{6^2}\phi + \frac{20 \cdot 6}{2} \Rightarrow Q_{BG} = \frac{EI\phi}{6} + 60$$

$$Q_{GB} = \frac{6EI}{6^2}\phi - \frac{20 \cdot 6}{2} \Rightarrow Q_{GB} = \frac{EI\phi}{6} - 60$$

Ισοροπία κόμβου B:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow M_{BA} + M_{BG} - 180 = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\phi}{3} - 360\right) + \left(\frac{2EI\phi}{3} + 60\right) - 180 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{EI\phi = 480} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow Q_{BA} + B_y - Q_{BG} = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\phi}{24} - 160\right) + B_y - \left(\frac{EI\phi}{6} + 60\right) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{B_y = 280 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Κόμβος A:

$$A_y = Q_{AB} \Rightarrow A_y = \frac{EI\phi}{24} + 160 \Rightarrow \boxed{A_y = 180 \text{ kN}}$$

$$M_A = M_{AB} \Rightarrow M_A = \frac{EI\phi}{6} + 360 \Rightarrow \boxed{M_A = 440 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

Κόμβος Γ:

$$\Gamma_y = -Q_{\Gamma B} \Rightarrow \Gamma_y = -\left(\frac{EI\phi}{6} - 60\right) \Rightarrow \boxed{\Gamma_y = -20 \text{ kN}}$$

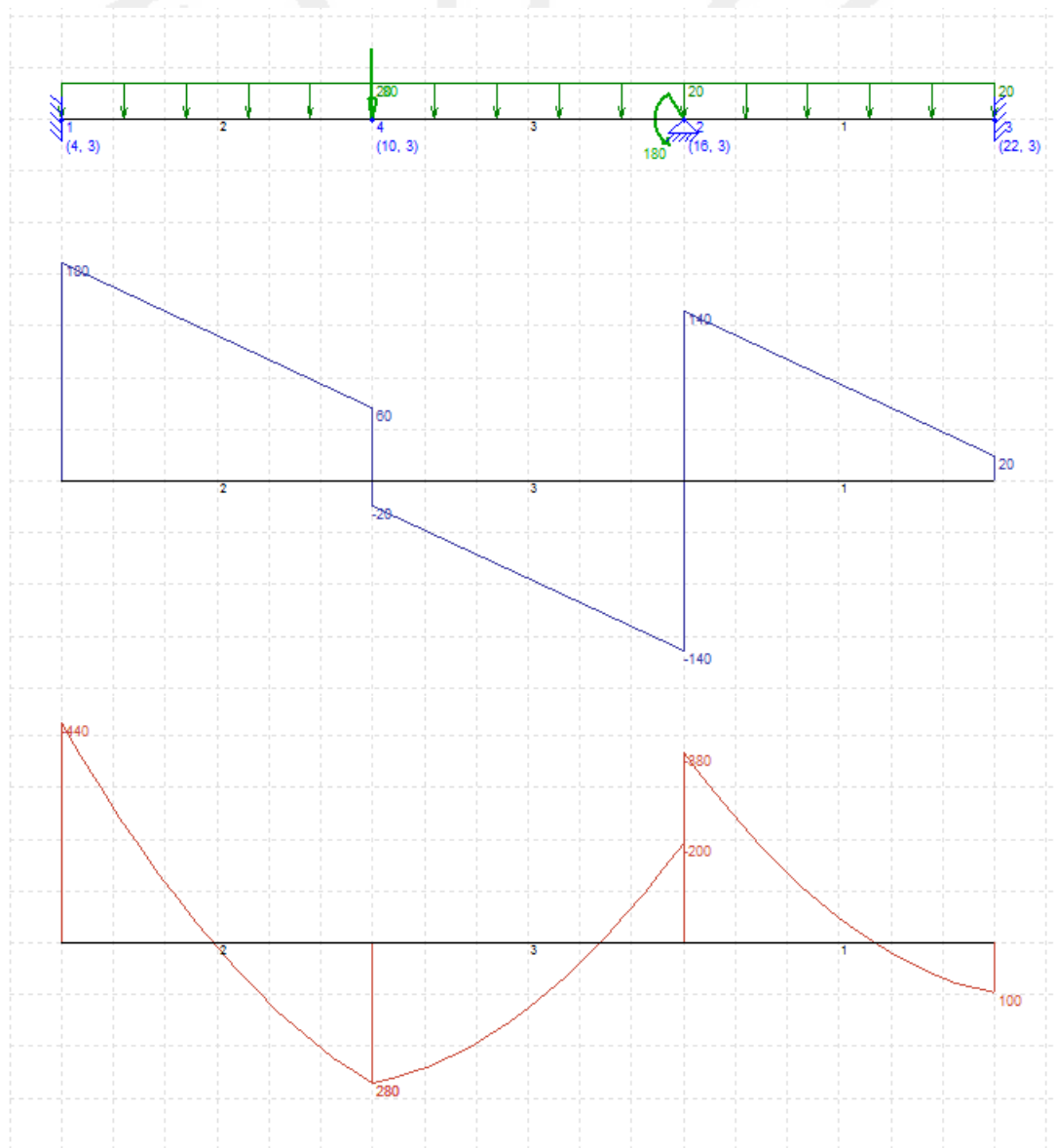
$$M_{\Gamma} = M_{\Gamma B} \Rightarrow M_{\Gamma} = \frac{EI\phi}{3} - 60 \Rightarrow \boxed{M_{\Gamma} = 100 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

Ισοροπία πλαισίου: (έλεγχος ή εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού B_y)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y + \Gamma_y - 20 \cdot 18 - 80 = 180 + B_y - 20 - 360 - 80 = 0$$

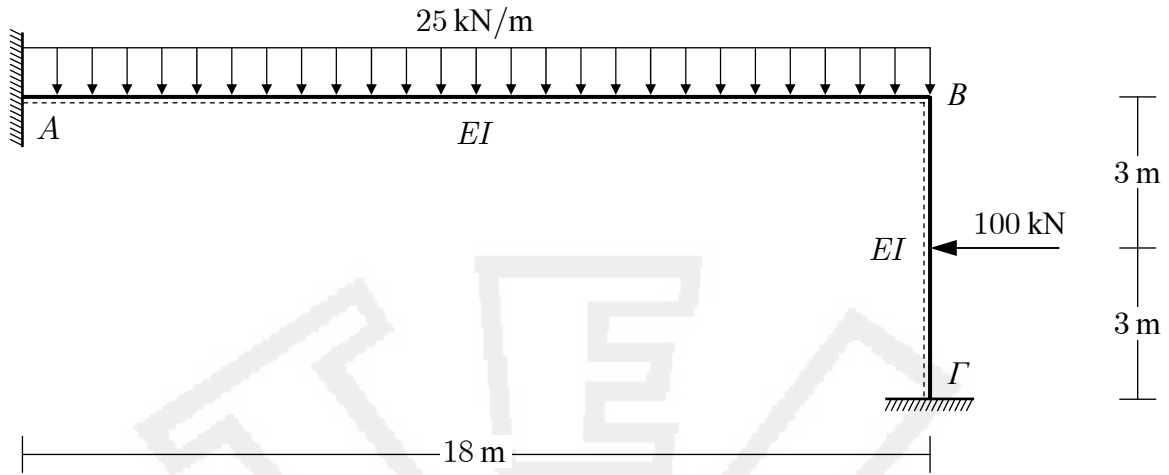
$$\Rightarrow \boxed{B_y = 280 \text{ kN}} \quad \checkmark$$

Διαγράμματα Τεμνουσών και Ροπών



Άσκηση 60

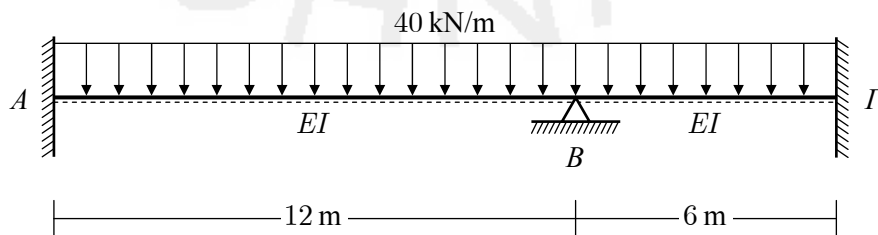
Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών [N], τεμνουσών [Q] και καμπτικών ροπών [M] του υπερστατικού φορέα.



Άσκηση 61

Να επιλυθεί η υπερστατική δοκός του σχήματος με τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

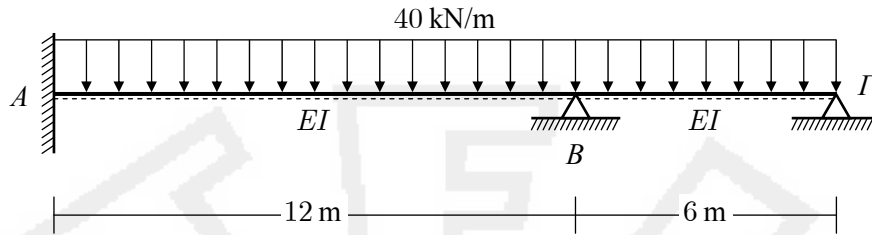
- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία *A*, *B* και *Γ*.
- (β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις *A*, *B* και *Γ* του φορέα.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- (δ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



Άσκηση 62

Να επιλυθεί η υπερστατική δοκός του σχήματος με τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

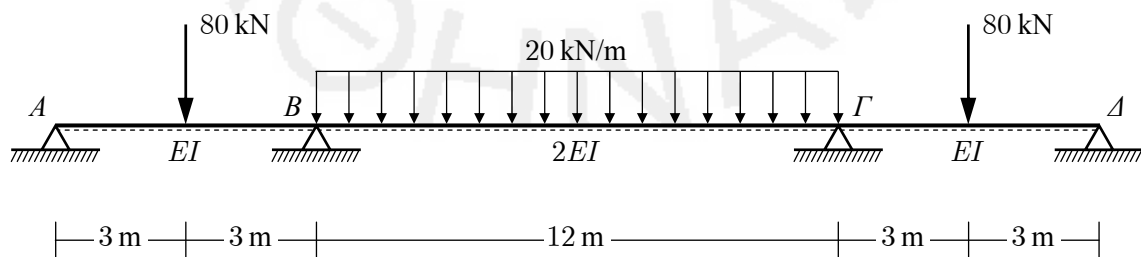
- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία *A* και *B*.
- (β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις *A*, *B* και *Γ* του φορέα.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- (δ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



Άσκηση 63

Να επιλυθεί η υπερστατική δοκός του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

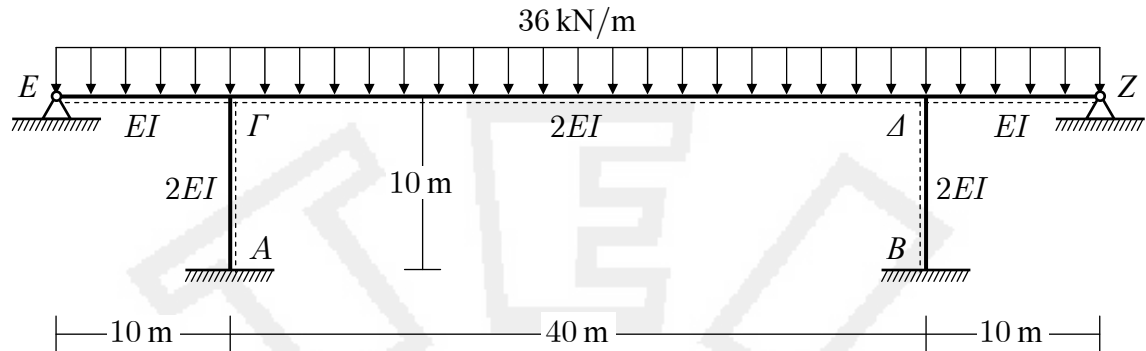
- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία *B* και *Γ*.
- (β) Να προσδιορισθεί η μέγιστη ροπή κάμψης.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.



Άσκηση 64

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

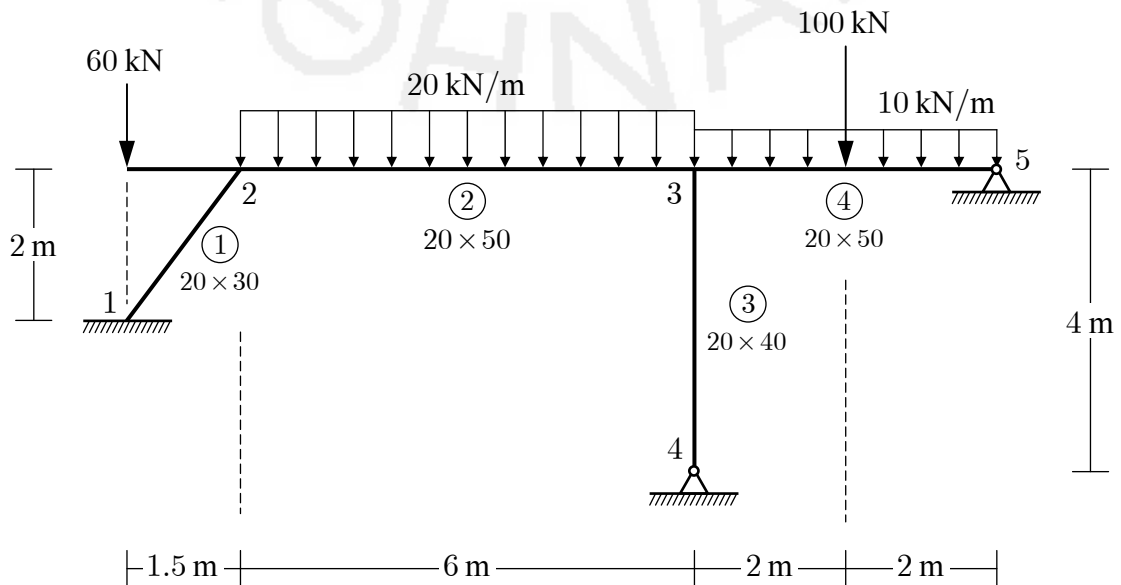
- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία A , B , Γ και Δ .
- (β) Να προσδιορισθεί η μέγιστη ροπή κάμψης.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.



Άσκηση 65

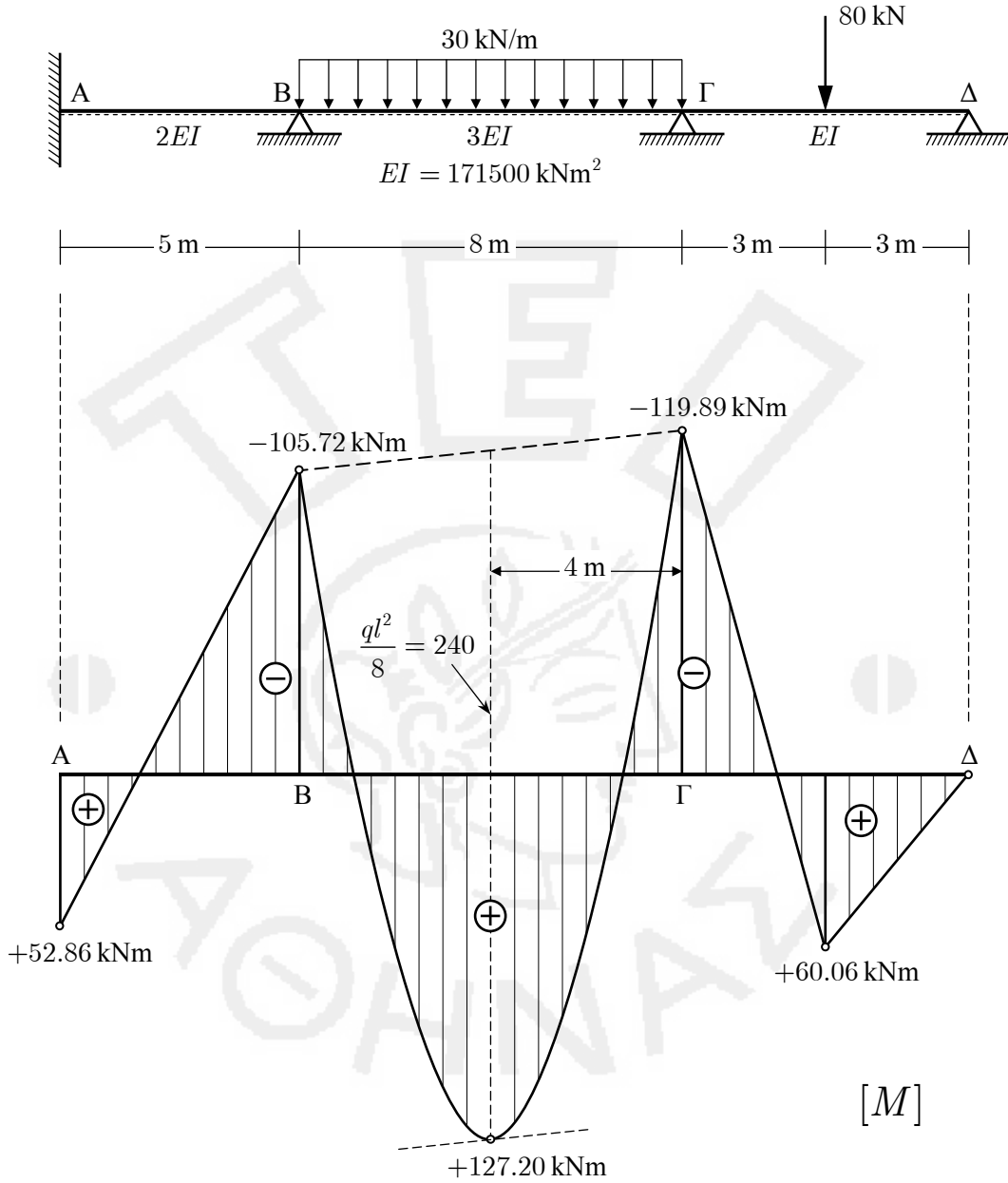
Να επιλυθεί το υπερστατικό πλαίσιο του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στους κόμβους 1, 2 και 3.
- (β) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.



Άσκηση 66

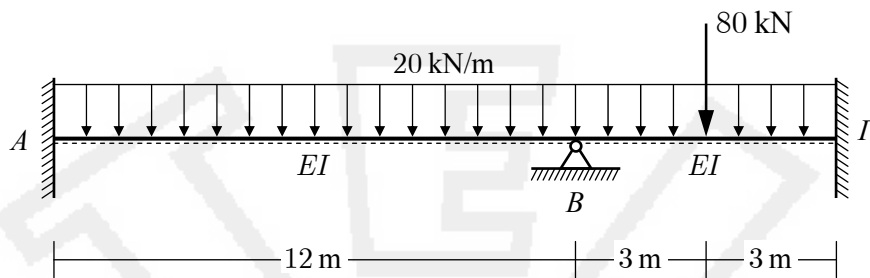
Να επιλυθεί η συνεχής δοκός του σχήματος και να σχεδιασθεί το διάγραμμα καμπτικών ροπών [M] του υπερστατικού φορέα (δίδεται η απάντηση).



Άσκηση 67

Να επιλυθεί η υπερστατική δοκός του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

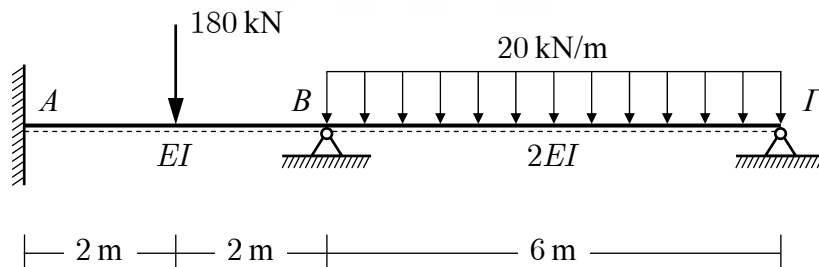
- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία A , B και Γ .
- (β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις A , B και Γ του φορέα.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- (δ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



Άσκηση 68

Να επιλυθεί η υπερστατική δοκός του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία A και B .
- (β) Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών του φορέα και να προσδιορισθεί η μέγιστη ροπή κάμψης.

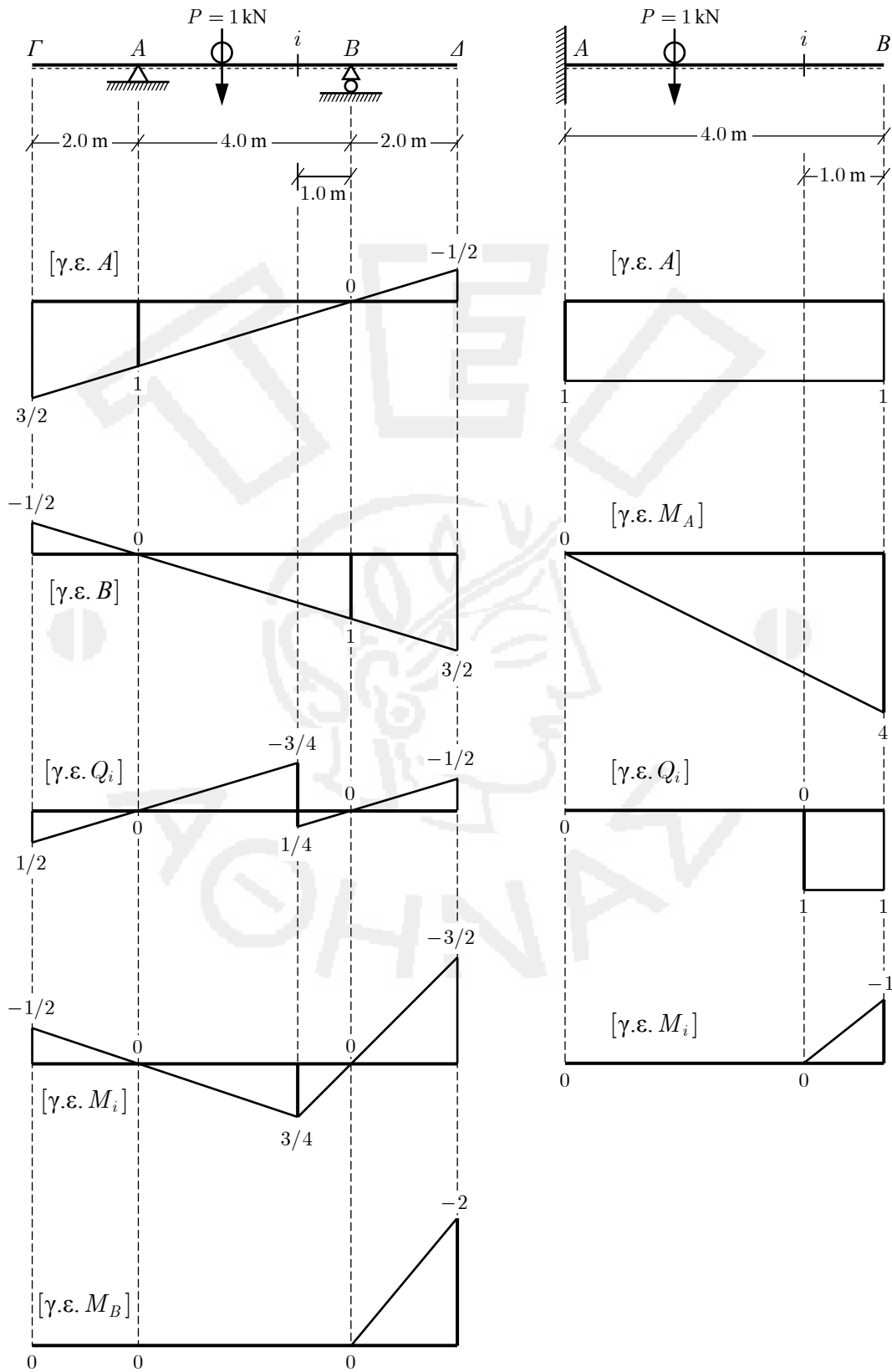


Μέρος 5^ο

Γραμμές Επιρροής

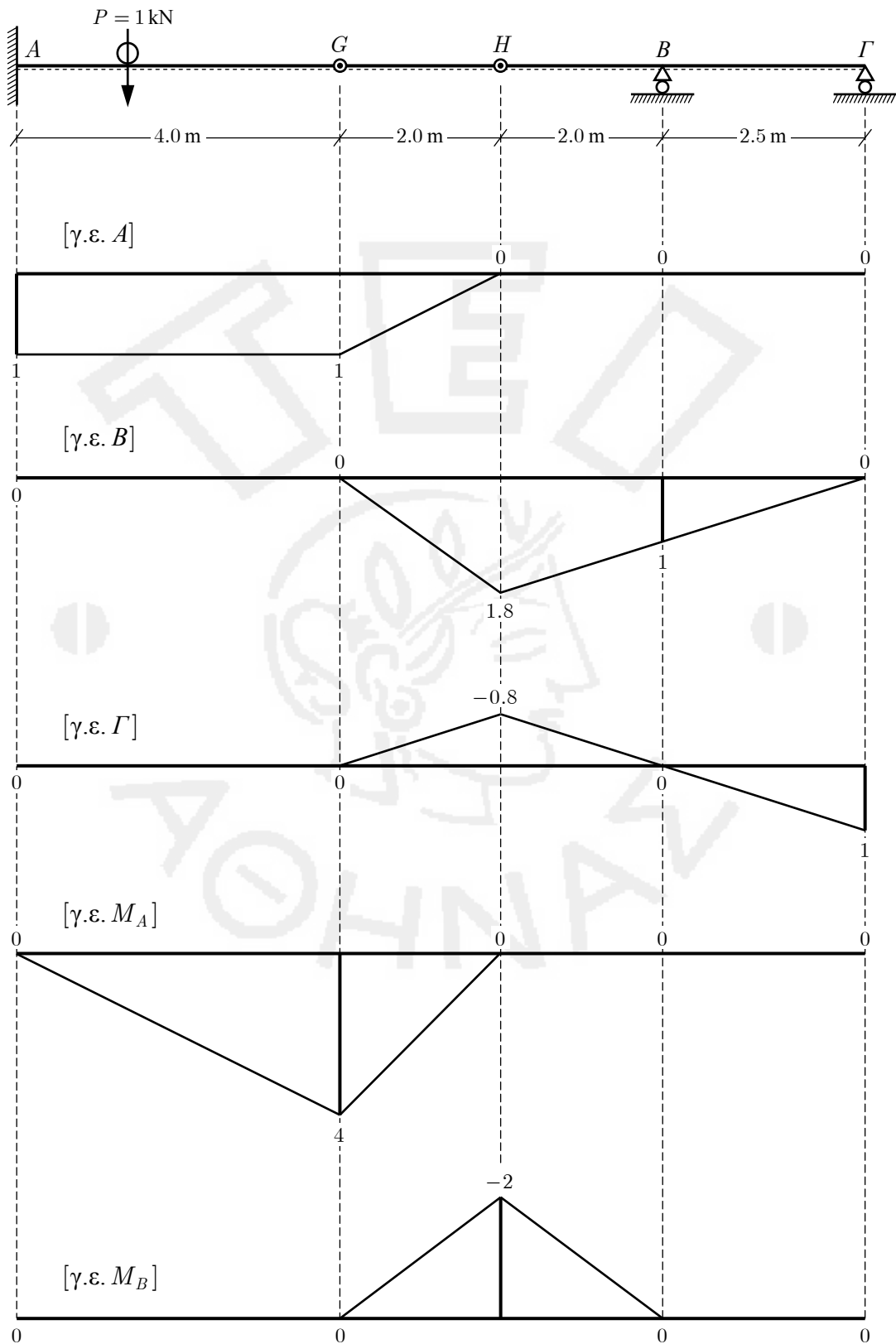
Άσκηση 69

Γραμμές επιρροής των αντιδράσεων και χαρακτηριστικών εσωτερικών εντατικών μεγεθών αμφιπροέχουσας δοκού και προβόλου.



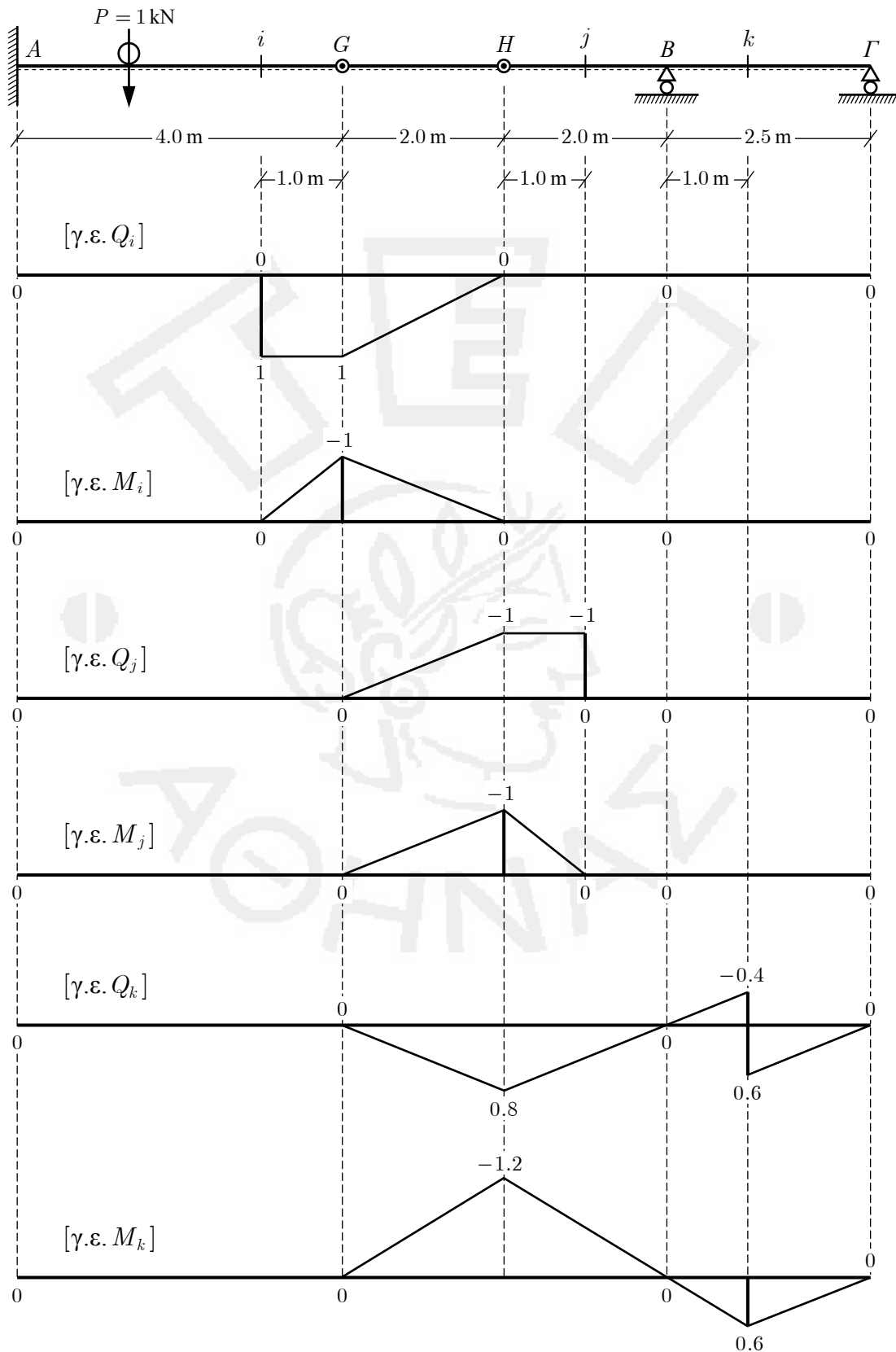
Άσκηση 70

Για τη δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής των αντιδράσεων στις στηρίξεις A , B και Γ , καθώς και των ροπών M_A και M_B .



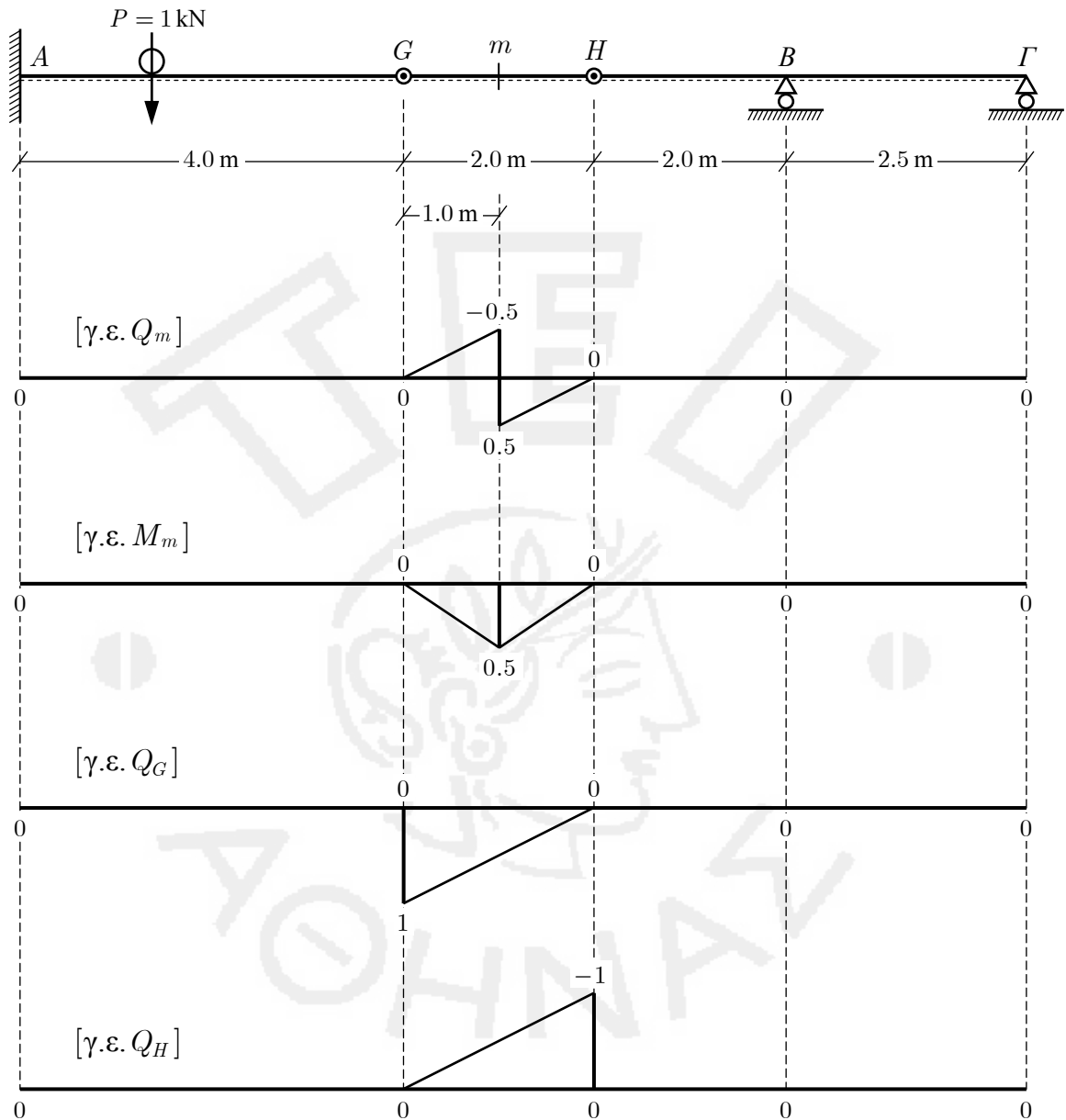
Άσκηση 71

Για τη δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής των διατμητικών δυνάμεων και καμπτικών ροπών στις τομές i, j και k .



Άσκηση 72

Για τη δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής των διατμητικών δυνάμεων και καμπτικών ροών στη τομή m και των διατμητικών δυνάμεων στις αρθρώσεις G και H .



Άσκηση 73

Για τη συνεχή δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής:

- (α) της αντίδρασης στη στήριξη A ,
- (β) της αντίδρασης στη στήριξη Γ ,
- (γ) της τέμνουσας Q_i στη τομή i ,
- (δ) της τέμνουσας Q_{G^+} αμέσως δεξιά της άρθρωσης G ,
- (ε) της καμπτικής ροπής M_B στη στήριξη B , και
- (στ) της καμπτικής ροπής M_k στη τομή k .

